三角形の方程式について

船橋啓明高等学校 新堀 弘騏

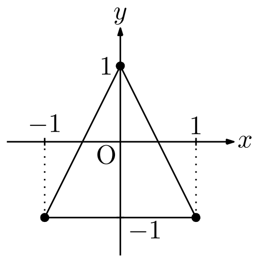
平面上の直線や円の方程式は，かなり以前に見つかっており，よく，使われもしている。しかしながら，三角形の方程式は長い間，見出そうと努力する者がいなかった。むしろ，3 本の直線を用いることで，そんな不便を感じなかった面もあるので，それが 1 つの方程式として存在することなどに関心を持つものなどいなかったのではないかと思われる。

そこで，この試論では，任意の三角形の方程式を求める方法とその方程式の形を述べることで，任意の三角形の方程式を表現する方法が存在していたことを示す。そのために絶対値の記号が必要とされる。

1　三角形の基本方程式

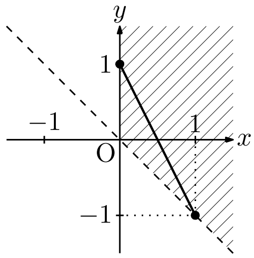
$$|x| + \Bigl||x| + y\Bigr| = 1 \tag{1-1}$$

を三角形の基本方程式と呼ぶ。
(1-1) は，下図のような三角形を表す。

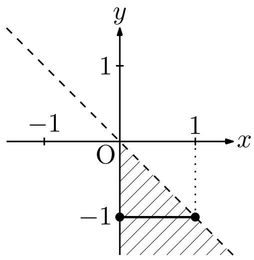


実際に，このことを確かめる。

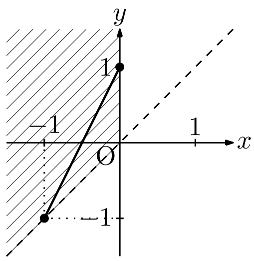
i) $x \geqq 0$ かつ $x + y \geqq 0$ のとき，$2x + y = 1$



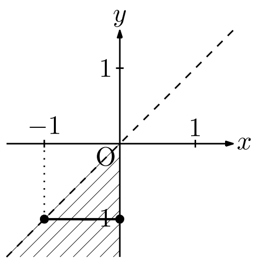
ii) $x \geqq 0$ かつ $x+y \leqq 0$ のとき，$y=-1$



iii) $x \leqq 0$ かつ $-x+y \geqq 0$ のとき，$-2x+y=1$



iv) $x \leqq 0$ かつ $-x+y \leqq 0$ のとき，$y=-1$



よって，i)〜iv) より，(1-1) が，3 点 $(0,1),(-1,-1),(1,-1)$ を頂点とする三角形を表すことがわかる。

2　三角形の方程式の一般形

三角形の基本方程式を出発点として，一般の三角形の方程式がどのような形になるかを考えよう。そのために，アフィン変換を用いる。

今，任意に与えられた三角形の 3 頂点の座標を $(x_i,\, y_i)_{\,i=1,2,3}$ とし，アフィン変換 f が，

$$\begin{array}{rcl} (0,\,1) & \longmapsto & (x_1,\,y_1) \\ (-1,\,-1) & \longmapsto & (x_2,\,y_2) \\ (1,\,-1) & \longmapsto & (x_3,\,y_3) \end{array} \tag{2-1}$$

と対応させるものだとし，その逆変換を考えるのである。それが，

$$\begin{array}{rcl} Ax_1+By_1+C &=& 0 \\ Dx_1+Ey_1+F &=& 1 \\ Ax_2+By_2+C &=& -1 \\ Dx_2+Ey_2+F &=& -1 \\ Ax_3+By_3+C &=& 1 \\ Dx_3+Ey_3+F &=& -1 \end{array} \tag{2-2}$$

(ここで，係数 A, B, C, D, E, F は実数)
を満たすと，f の逆変換によって，$(x',\,y') \longmapsto (x,\,y)$ なる対応は，

$$\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ -1 & y_2 & 1 \\ 1 & y_3 & 1 \end{vmatrix} x' + \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & -1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & -1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \\ y &=& \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & 1 \\ -1 & y_2 & 1 \\ -1 & y_3 & 1 \end{vmatrix} x' + \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & -1 & 1 \\ x_3 & -1 & 1 \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & -1 \\ x_3 & y_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \end{array} \tag{2-3}$$

となる。

上の 2 式を (1-1) に代入することで，三角形の方程式は一般に，

$$|\ell x+my+n| + \Bigl|\,|\ell x+my+n| + px+qy+r\Bigr| = k \tag{2-4}$$

の形になることが予想される。

アフィン変換は，その逆変換も含めて，次の性質をもつ。

(1) 直線は直線に移す。

(2) 平行性を保つ。

つまり，任意の三角形に対して，基本三角形 (1-1) から，その方程式を (2-3) を用いて，求めることができ，その形は，(2-4) のようになるのである。

3 三角形の集合

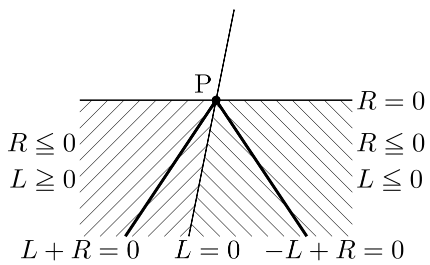
$$L(x,y) = \ell x + my + n, \quad R(x,y) = px + qy + r$$

とおくと，方程式

$$|L(x,y)| + \Big||L(x,y)| + R(x,y)\Big| = k \quad (k\text{ は正の定数}) \tag{3-1}$$

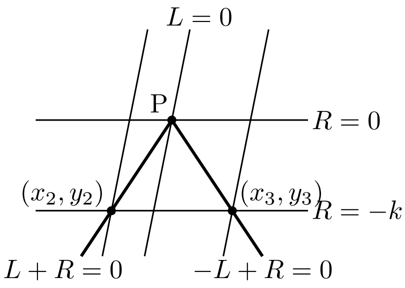
(ただし，$L(x,y)$ と $R(x,y)$ は，$L(x,y) \neq R(x,y)$，かつ $\begin{vmatrix} \ell & m \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0$ を満たすものとする)

は，三角形を表す。
以下，簡単のために $L(x,y) = L$, $R(x,y) = R$ と表す。
$L(x,y) = 0$ は，直線を表すが，$|L(x,y)| + R(x,y) = 0$ は，どんな図形になるだろうか。
$R = -|L| \leqq 0$ より，$R > 0$ の領域に $|L| + R = 0$ のグラフは存在しない。



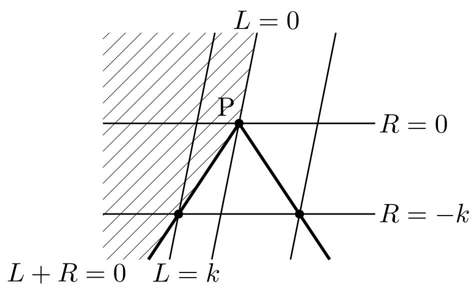
$R \leqq 0$ かつ $L \geqq 0$ の領域で，$|L| + R = L + R = 0$
$R \leqq 0$ かつ $L \leqq 0$ の領域で，$|L| + R = -L + R = 0$

$L + R = 0$, $-L + R = 0$ は，明らかに平行でない 2 直線であり，$L = 0$ と $R = 0$ との交点 P を曲がり角とする折れ線となっていることがわかる。
直線 $R = -k$ は，$R = 0$ に平行である。
今，$R = -k$ と 2 直線 $L + R = 0$, $-L + R = 0$ との交点を考える。$L = k$, $L = -k$ となる直線と $R = -k$ との交点はそれぞれ $(x_2,\, y_2)$, $(x_3,\, y_3)$ とおける。

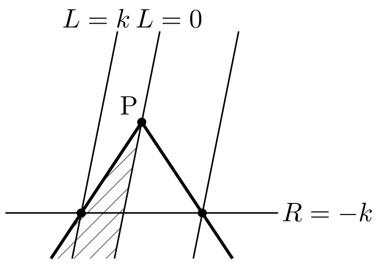


さて，そろそろ本題に移ろう。
方程式 (3-1) が，どんな三角形なのかを説明する。
そのために，これが 4 つの領域において，どのようにふるまうかを見る。

i) $L \geqq 0$ かつ $L+R \geqq 0$ では，$2L+R=k$ なる直線で，$R=k$ かつ $L=0$ を同時に満たす点を (x_1,y_1) とすれば，$2L+R=k$ は，(x_1,y_1), (x_2,y_2) を通ることがわかる。



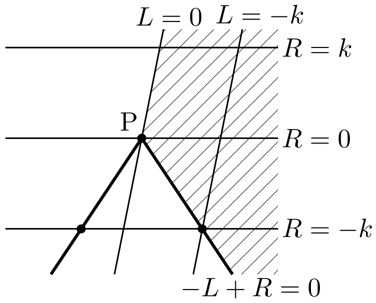
ii) $L \geqq 0$ かつ $L+R \leqq 0$
$L-(L+R)=k$ より，$R=-k$



iii) $L \leqq 0$ かつ $-L+R \geqq 0$
$(-L)+(-L+R)=k$ より，$-2L+R=k$ なる直線で (x_1,y_1), (x_3,y_3) を通る。
なぜなら，$L(x_1,y_1)=0$, $R(x_1,y_1)=k$ だから，

$$|L|+\Big||L|+R\Big|=|0|+\Big||0|+k\Big|=k$$

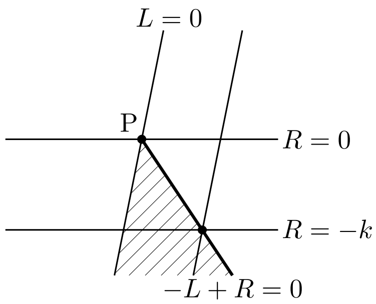
をみたす。$L(x_3,y_3)=-k$, $R(x_3,y_3)=-k$ だから，



$$|L|+\Big||L|+R\Big|=|-k|+\Big||-k|+(-k)\Big|=k$$

をみたしているからである。

iv) $L \leqq 0$ かつ $-L+R \leqq 0$ の領域では，
$(-L)-(-L+R)=k$ より，$R=-k$
$R=-k$ は，2 点 (x_2, y_2), (x_3, y_3) を通っている。



したがって，i)〜iv) より，(3-1) が 3 つの連立方程式

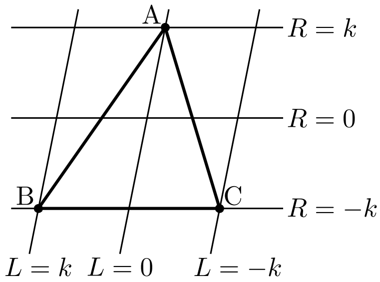
$$\begin{cases} L=0 \\ R=k \end{cases} \qquad \begin{cases} L=k \\ R=-k \end{cases} \qquad \begin{cases} L=-k \\ R=-k \end{cases} \tag{3-2}$$

それぞれを満たす解を順に $\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2), \mathrm{C}(x_3, y_3)$ とすれば，これらを 3 つの頂点とする △ABC を表すことがわかる。

4　三角形の方程式の求め方

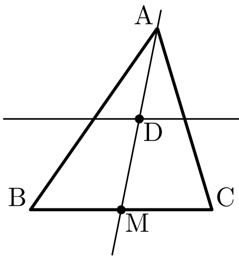
$$|L|+\Big||L|+R\Big|=k$$

なる三角形の方程式のグラフは，平行な 2 組の直線群を用いて，その交点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を選ぶと作れる。



そこで，一般に与えられた三角形から，その方程式を求める方法が明らかになる。

△ABC において，頂点 A を選んでみる。



対辺 BC の中点 M と A を通る直線の方程式を求める。($L=0$ が得られる。)

次に辺 AB, AC の中点を通る直線の方程式を求める。これは，中線 AM の中点 D を通って，辺 BC に平行な直線の方程式として求めてもよい。($R=0$ が得られる。)

k の値は，$L(x_2, y_2)$ か $L(x_3, y_3)$ かのいずれかを求めて，その絶対値をとればよい。

注意すべきは，$R(x_1, y_1) > 0$ か $R(x_1, y_1) < 0$ かで，方程式形をそれぞれ

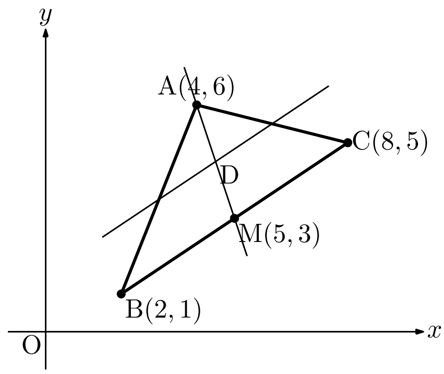
$$|L| + \Big||L| + R\Big| = k, \qquad |L| + \Big||L| - R\Big| = k$$

のいずれかにすることである。

なぜなら，頂点 A においては，$R = k > 0$ をみたしていなければならないからである。

それでは具体的に適用してみよう。

3 頂点が，A$(4, 6)$, B$(2, 1)$, C$(8, 5)$ としよう。



直線 AM の方程式は，$-3x - y + 18 = 0$

$$-3(2) - (1) + 18 = 11 \quad (\text{または} -3(8) - (5) + 18 = -11)$$

したがって，$k = 11$。

また中線 AM の中点 D $\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$ を通って，辺 BC に平行な直線を求めると，

$$4x - 6y + 9 = 0$$

これに M$(5, 3)$ と A$(4, 6)$ を代入してみると，

$$\begin{aligned} 4(5) - 6(3) + 9 = 11 &\quad > \quad 0 \\ 4(4) - 6(6) + 9 = -11 &\quad < \quad 0 \end{aligned}$$

なので，

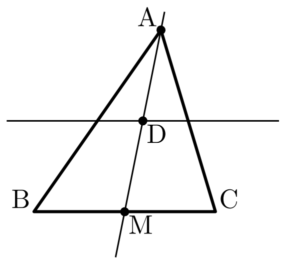
$$\begin{aligned} R(x, y) &= -(4x - 6y + 9) \\ &= -4x + 6y - 9 \end{aligned}$$

をとらなければならない。

求める △ABC の方程式は，

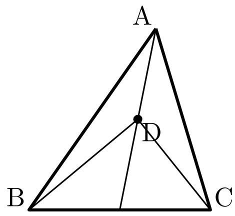
$$|-3x - y + 18| + \Big||-3x - y + 18| - (4x - 6y + 9)\Big| = 11$$

与えられた 3 点の座標から，それらを 3 頂点とする三角形の方程式を求めるのに，



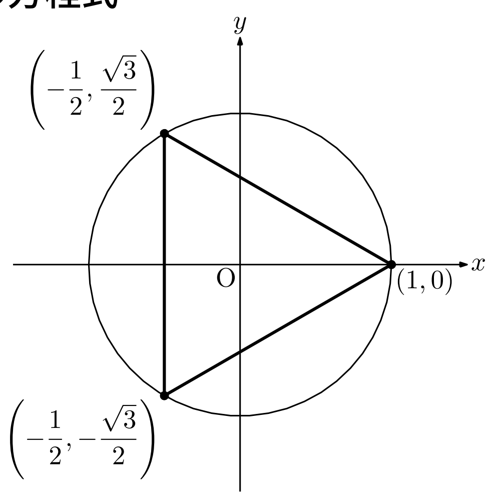
大切な役割を果たす 2 直線 $L=0,\ R=0$ に名前をつけたいと思う。上図における直線 AM は，点 A を通る中軸と呼び，中線 AM の中点 D を通って，辺 BC に平行な直線，つまり，辺 AB，辺 AC の中点を通る直線は，間軸と呼ぼう。正確には，頂点 A と辺 BC に対する間軸としよう。

この中軸 $L=0$ と間軸 $R=0$ を組み合わせることで，折れ線 BDC$(|L|+R=0)$ ができる。



この折れ線上に 2 頂点 B, C があるのである。

5　正三角形の方程式



単位円周上に 3 つの頂点をもつ正三角形の方程式を求めてみよう。

中軸は，$L=ay$ とおいて，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を代入してみると，

$$L\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}a \qquad ①$$

間軸は，$x=\dfrac{1}{4}$ から，$R=b\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$ とおいて，$(1,0)$ を代入してみると，

$$R(1,0)=\frac{3}{4}b \qquad ②$$

$① = ②$ にすればよいので，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{3}{4}b=k$

今，$b=1$ とすれば，$\left(a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad k=\dfrac{3}{4}$，

$$L=\frac{\sqrt{3}}{2}y,\ R=x-\frac{1}{4}$$

となるので，正三角形の方程式は，

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}y\right|+\left|\left|\frac{\sqrt{3}}{2}y\right|+x-\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{4}$$

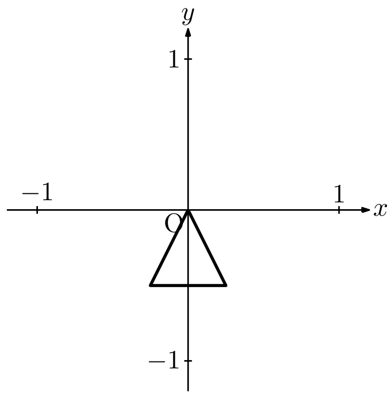
$$\therefore \left|2\sqrt{3}y\right|+\left|\left|2\sqrt{3}y\right|+4x-1\right|=3$$

6　終わりに…

三角形のどの頂点を通る中軸から求めようとするかで，結果として 3 種の見たところでは異なる方程式が得られる。それらが同じ三角形を表すかどうかは，3 つの連立方程式 (3-2) をそれぞれ作って解くことによって，求まる 3 頂点が一致するか否かで，今のところ判断するしかない。

さらに，三角形の方程式の形は，(3-1) のみではないことも付け加えておきたい。

$\left|x+y^2\right|+\left|x-y^2\right|+y=0$ なる方程式も下図のような三角形を表すことがわかる。



これを出発点として，三角形の方程式の一般形を見出すこともできる。

　最後に，絶対値記号を用いる方法で，多角形を表すこともできる。正多角形のうち，例えば，正六角形は単位円周上に頂点を持つものが，

$$\left|\sqrt{3}x+y\right|+\left|\sqrt{3}x-y\right|+2\left|y\right|=2\sqrt{3}$$

正八角形は，

$$\left|\frac{2-\sqrt{2}}{2}(x+y)\right|+\left|\frac{2-\sqrt{2}}{2}(x-y)\right|+\left(\sqrt{2}-1\right)\left(|x|+|y|\right)=1$$

などと表す方程式を見出すことができた。

　どうやら，絶対値と 1 次式を組合わせることで，多角形を表す方程式が求められそうなのである。