割り算の原理とその有効性

若松高等学校 木村 謙二

1　はじめに

今回の改訂で整数論が復活 (新設) した。計算の仕組みを深く考えるという対象としてはうってつけの内容であるが，指導方法に戸惑いがあるのも隠せない。特に割り算の原理は，今まで殆ど意識したことがない，という方も少なからずいるであろう。以前の課程までは，この分野を指導する単元はなかったが，私は今まで補助的に少しずつ指導してきた経緯があるので，参考になることがあればと，その内容について多少なりとも解説していきたい。授業創りの参考にしていただければ幸いである。

2　割り算は 2 種類存在する

① 完全に割り切る場合　(PC では/)
掛け算の逆演算として定義される

② 商と余りをだす場合　(PC では ¥，MOD など)
引き算の集合体として定義される

「足し算を集めると掛け算になるように，引き算を集めると割り算ができるね」と問いかけてみると面白い。思わず，うんうんと肯いてしまう生徒がいる傍ら，えーっ，と反応してくれる生徒もいるだろう。全く反応がないと悲しいが。

小学校の算数では，計算して答えを出すことに主眼を置いているので，計算の仕組みを改めて考える機会というのは殆どないといってよい。ここで，小学校の計算をもう一度見つめなおす好機と捉えて授業を創れば，生徒にとってもやり甲斐のあるものになるのではないだろうか。

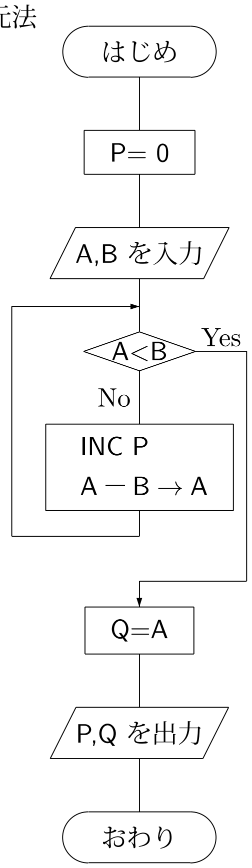
実際，割り算を引き算によってやってみせると食い付きがよい。「鉛筆が 20 本あります。一人に 3 本ずつ配るとどうなるでしょう。一人目に，はい 3 本，残りは 17 本。二人目に，はい 3 本，残りは 14 本。(中略) 2 本残って，もう配れない。割り算の問題だけど，引き算しかやっていないね。」

3　引き算から割り算を作る原理

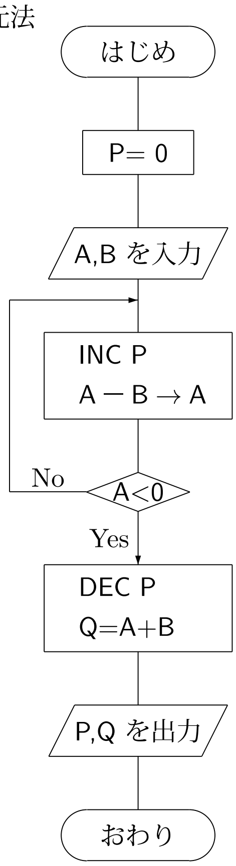
非復元法と復元法 (昔アセンブラの基礎でよく学習されていた)

$A \div B = P \cdots Q$　のアルゴリズム[1]　$(A > 0,\ B > 0)$

非復元法



復元法



非復元法が普通の考えのようだが，実は違うのかもしれない。ここがこの「実におもしろい」ところである。機械で実行すると復元法の方が断然速い。何故かというと，非復元法の比較 A < B は，実際には引き算を実行しキャリーフラグ[2]をチェックしている。これを毎回実行しているのに対し，復元法の場合は引き算をしたときに自動的に生じるキャリーフラグのチェックを使っている。即ち，非復元法は 1 回のループの間に引き算を 2 回実行していることになる。1 ステップ戻る復元法が，一見非合理的

[1]補足　INC P とは，P+1→ P，DEC P は，P-1→ P をそれぞれ意味する。

[2]補足　キャリーフラグとは，計算が桁あふれや符号の変化があった場合，自動で反応するフラグ (旗) であり，これの on，off により機械語ベースでは分岐をする。同様によく使うものとしてゼロフラグ (0 になると反応) がある。

に見えるようだが，実は有効な方法なのである。我々の頭の中で行われているのは，非復元法に見えて本当は復元法なのかもしれない。

復元法を知ることにより負の割り算を簡単に

例えば，$-13 \div 4$ を計算するとき，商 -4，余り 3 をいきなり出すことは，なかなか慣れないと難しい。どうしても今までの感覚で商－3，余り－1 と考えてしまいがちである。だが，これを直ぐに間違いと断定してしまってはいけない。この段階に正解へのヒントがある訳だ。余りが－1 ということは，復元法の Yes のステップに到達していると考えればよい。即ち，ここから一つ戻る操作をすれば正解へと辿り着ける。商を－1(DEC P) し，余りに 4 を加えれば (Q = A+B) よい訳だ。

4　負の数の割り算は役に立つ

この久しぶりに復活したような新しい単元に戸惑いと疑惑の目を向ける方々が多いであろうが，実はこの計算はとても有効なのである。私はこれが導入される前から自主的にこれを教え，使ってきた。その幾つかの例を紹介しよう。

① 指数の計算
先ず，正の場合でも有効な例を，
$2^{\frac{11}{3}} = 2^{3+\frac{2}{3}} = 8\sqrt[3]{4}$
更に，負の場合ではもっと有効である。
$2^{-\frac{11}{3}} = \dfrac{1}{2^{\frac{11}{3}}} = \dfrac{1}{8\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{8\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{16}$ としてしまいやすいが，
$2^{-\frac{11}{3}} = 2^{-4+\frac{1}{3}} = \dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{2^4} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{16}$ とする方がより容易である。

② 常用対数への利用
常用対数にしたとき負の数の場合，対数表から元に戻す際には，小数部分を正にする必要がある。$-2.3145 = -3 + 0.6855$ の様な変形をするが，これが余りを正にする割り算の原理と共感するであろう。

また，有効利用ということではないが，教科書のその後の記述について解説したい。

例えば，4 で割って 2 余る数 a と 3 余る数 b に対し，$a+b$ の余りは，という問題では，$(4k+2)+(4l+3) = 4(k+l+1)+1$ のような変形をするが，これは実際には割り算を実行しているに他ならない。

これが，レベルの高い教科書になると，$a-b$ の余りは，という問題が出現してくる。必然的に余りが負になるわけで，これを正にする補正が必要となる。せっかく負の数の割り算をやったのだから，このようなケースを練習したほうがよいのだろうが，通常の生徒には少し厳しいという教科書会社の目算であろう。

5　負の帯分数は

余りのある割り算といえば，帯分数との関係が深い。しかしこの帯分数，中学校以来殆ど見ることがなく，中学校では毛嫌いされているようだ。最近は小学校でさえほとんど触れていないようである。だがこの考え方は，あまり一般的ではなかったかもしれないが，上で示したように有効な利用があるのだ。

ところで，負の帯分数とはどのようなものであろうか。

$-5\dfrac{2}{3}$ と表記された場合，$-5+\dfrac{2}{3}$ とするか，$-\left(5+\dfrac{2}{3}\right)$ とするかである。

この単元の趣旨からすれば前者が適当であろうが，世間一般では後者と考えられはしまいか。非常に誤解を生みやすい表現である。現状は無定義で特に決まりはないようである。そうであれば，誤解を生じないように整数の後に + の記号を挿入しておくしかないようである。

6　割る数が負のときはどうする

教科書では割る数を正に限定しているが，負の数に拡張するとどうなるかという問題が残る。これを検証してみよう。

5 ÷ (− 3) を考えてみる。

① $5 \div (-3) = -5 \div 3$ と考える
　当然，商− 2，余り 1 である。

② 余り Q の定義を $0 \leqq Q < |B|$ とする
　$5 = (-3) \times (-1) + 2$ だから，商 -1，余り 2 となる。

双方とも考え方に一理あるが，相対する結果を生じるので困ってしまう。4 で述べた負の帯分数と同様の問題がある。ということで，割る数は正に限定とした，と考えるのが妥当であると思われる。しかし，このことを教員が十分把握してから授業に臨まないと，生徒に質問を受けたときに困るであろう。

7　表計算ソフトではどうなるか

実際に自分で試してみるとよい。`MOD(-5,3)` を計算してみると，Microsoft Excel では 1 が出た (拍手)。Lotus 1-2-3 でこれを実行してみたところ− 2 とでてしまった (Microsoft Excel の勝利か?)。ところがこれを `MOD(5,-3)` としてみるとどうだろう。今度は Microsoft Excel では −1 と出てしまった (何故?)。再度 Lotus 1-2-3 で実行してみたところ今度は 2 がでてきた，前述の ② の定義どおりである。このように不思

議な結果が出ているので，是非各自で実験していただきたい。表計算の結果を鵜呑みにしてはいけないということであろう。

8　互除法は引き算で

互除法というと割り算が主体だと思いがちであるが，主力は引き算である。商が 2 や 3 くらいなら，引き算を 2,3 回すればいいわけだから，よほど割り算が速くなければ引き算のほうが容易である。互除法の説明も，A, B が m の倍数なら $A-B$ も m の倍数である，と容易に説明できる。順次引き算をして，その段階での最小の 2 数 (今まで出てきた数はすべて利用可能) に置換していく，という手順である。

例 1　1591 と 1763 の最大公約数

1591	1763	大ー小
	172	$1591 \div 172$ の余りでもよいが 1720 が容易につくれるのでこれを利用
	(-1720)	1591 の方でなく 1763 を使うと楽
(172)	43	素数が出たら終わってもよい　172 と 43 が最小の 2 数
129		
86		
43		2 数完全一致で完全回答

例 2　3233 と 4717 の最大公約数

3233	4717	
	1484	
1749		
265	(-1325)	5 倍が容易につくれるので利用した方が楽だが, $1219 \to 954 \to 689 \to 324$ と引き算でも可
	159	
106		
	53	素数なので終わってもよい
53		2 数完全一致で完全回答

9　鳩の巣原理で有理数の説明

これは数学 I の実数での内容であるが，数学 A でもまた詳しく取り上げられている。I と A をうまくリンクさせて，同時に学習してしまうと効果的であろう。この原理は，実際に割り算を計算させて発見学習に繋ぐことのできる格好の教材である。生徒向けの表現ではあるが，この教材について述べてみる。

$a \div b$ の余りは 0 以外では $b-1$ 種類しかないので高々 b 回目には必ず今まで出た余りと同じ余りが出現する。同じ余りが出ればそこから循環が起きる。よって整数の割り算は，割り切れるか，循環小数になる。このような理のある数を有理数という。

もちろん授業でやるときには，適当な割り算を実行させて，体感させることが重要である。どこで計算をやめるべきか自ら考えることにより，循環についての発見を導くこともできる。どちらを先に学習しても，割り算の余りの約束と関連付けることができるだろう。

10　最後に

「算数と数学の違いとは」を答えるにあたって，割り算の原理は実にいい内容である。算数では割り算を正しく速やかに計算できる旨をよしとする。対して，数学ではその計算の仕組みを考えることが大切である。このシンプルな題材の中に実に多彩な内容が隠れている。一見簡単に見えるものでも，掘り下げて深く考えると味わい深いものになるものだ。この単元を面倒に考えるか，興味深いと考えるか，どちらの考え方をとるかによって授業の創り方も大いに変わってこよう。すべてを生徒に教える必要はないだろう。しかし，教員側が深い理解をもっていると授業の中で自然ともっている知識がにじみ出てきて，生徒の数学への関心も高いものになっていくと私は考える。