sin と cos の数論的な積公式

県立柏高等学校 西川 誠

$2\cos\frac{\pi}{7}\cdot 2\cos\frac{2}{7}\pi\cdot 2\cos\frac{3}{7}\pi=1$ のような cos の積公式は，大学入試でもときどき出題されています。また，これを一般化して，$\prod_{k=1}^{n-1} 2\cos\frac{k}{n}\pi=1$ (ただし n は奇数) とか，sin の積も考えて，$\prod_{k=1}^{n-1} 2\sin\frac{k}{n}\pi=n$ などがインターネットで検索すると出てきますが，これをさらに発展させるとどうなるか。例えば $2\cos\frac{\pi}{28}\cdot 2\cos\frac{3}{28}\pi\cdot 2\cos\frac{9}{28}\pi$ のような積だとどんな値になるか。これは，インターネットで検索してもあまり出てきません。結局，ある条件を満たすものを一部だけ取ってきて積を作るという操作が入るため，簡単な証明ができないからなのでしょうか。こういった計算は，もともと数論（平方剰余など）が関係している問題なので，このような等式は，「数論的な等式」と呼べそうです。数論的な等式は，cos とか sin で分離して表示するようなレベルの話じゃなく，ガウスの和のように複素数の世界で見るべき等式なのだと思います。数学者にとっては，簡単な等式なのでしょうが，一般の人達には，あまり知られていない内容に当たるのでしょう。

今回は，このレポートを書くために数年前にやったことを再度，いろいろと数値実験をやってみた訳ですが，高木貞治先生の初等整数論講義の序言にあるように，「代数学でも，関数論でも，又は，幾何学でも，整数論的の試練を経て始めて精妙の境地に入るのである。」という言葉が，このような数値実験だけでも実感できるような気がしています。今回は，こういった数論的な公式のいくつかを紹介したいと思います。

1　過去の大学入試問題等

まず今回のことに関係がありそうな入試問題等を簡単に紹介しておきます。（問題文の抜粋です。）

① $\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi$ の値（慶応大学）

② $\cos\frac{2}{7}\pi\cdot\cos\frac{4}{7}\pi\cdot\cos\frac{6}{7}\pi$ の値（東京慈恵会医科大学）

③ $\cos\frac{2}{7}\pi$ の小数第 1 位の数（大阪大学）

④ $\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{3}{10}\pi\cdot\cos\frac{7}{10}\pi\cdot\cos\frac{9}{10}\pi$ の値（京都大学）

⑤ n が自然数のとき，$\cos^n \dfrac{\pi}{7} + \cos^n \dfrac{3}{7}\pi + \cos^n \dfrac{5}{7}\pi$ の値は，有理数であることを証明せよ。（ソ連時代の数学雑誌クヴァントに載っていました。）

⑥ 3 次方程式 $x^3-3x+1=0$ の 1 より大きい解を α とすると, 残りの 2 つの解は, $\beta=\alpha^2-2$, $\gamma=\beta^2-2$ となることを示せ。（1997 年早稲田大学）

最後の問題は，「入試数学伝説の良問 100」[2] の問題 9 に当たりますので，詳しい問題文と普通の解答はそちらをご覧下さい。（問題①〜⑤の解説は，最後の節に書きました。）問題⑥は 3 つの実数解をもつのですが，その場合は，cos を使って解くことができるので，その方向での解答を次に紹介しておきます。

$x^3-3x+1=0$ に $x=A\cos\theta$ を代入すると，$A^3\cos^3\theta-3A\cos\theta+1=0$ となります。3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より，$\cos^3\theta = \dfrac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4}$ を代入して両辺を 4 倍すると，$A^3(\cos 3\theta + 3\cos\theta) - 12A\cos\theta + 4 = 0$ となり，さらに整理すると，$A^3\cos 3\theta + (3A^3-12A)\cos\theta + 4 = 0$ が出てきます。ここで，$3A^3-12A=0$ となる A として，$A=2$ を取ると，$\cos 3\theta = -\dfrac{1}{2}$ なので，$3\theta = \dfrac{2}{3}\pi, \dfrac{4}{3}\pi, \dfrac{8}{3}\pi$ が得られ，$\theta = \dfrac{2}{9}\pi, \dfrac{4}{9}\pi, \dfrac{8}{9}\pi$ となります。

結局 $x = 2\cos\dfrac{2}{9}\pi, 2\cos\dfrac{4}{9}\pi, 2\cos\dfrac{8}{9}\pi$ がこの 3 次方程式の解になることがわかりました。つまり $\alpha = 2\cos\dfrac{2}{9}\pi$，$\beta = 2\cos\dfrac{4}{9}\pi$，$\gamma = 2\cos\dfrac{8}{9}\pi$ となり，$\beta=\alpha^2-2$ のというのは，2 倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を 2 倍した $2\cos 2\theta = (2\cos\theta)^2 - 2$ に対応しています。$\dfrac{8}{9}\pi$ を 2 倍した $\dfrac{16}{9}\pi$ で $2\cos\dfrac{16}{9}\pi = 2\cos\dfrac{2}{9}\pi$ と元にもどります。こういった，cos と 3 次方程式の関係などの紹介も，今回のレポートの目的の 1 つです。

2　$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の積公式

$\cos\dfrac{\pi}{5}$ に関係した積の公式を証明するために，因数分解の公式を最初に作っておきます。前に係数 2 を付けているのは，その方が公式がきれいに表示できるからです。

因数分解の公式 A

① $x^2-x-1 = \left(x-2\cos\dfrac{\pi}{5}\right)\left(x-2\cos\dfrac{3}{5}\pi\right)$

② $x^2+x-1 = \left(x-2\cos\dfrac{2}{5}\pi\right)\left(x-2\cos\dfrac{4}{5}\pi\right)$

③ $f(x) = x^2-\sqrt{5}x+1 = \left(x-2\cos\dfrac{\pi}{5}\right)\left(x-2\cos\dfrac{2}{5}\pi\right)$

④ $x^2+\sqrt{5}x+1 = \left(x-2\cos\dfrac{3}{5}\pi\right)\left(x-2\cos\dfrac{4}{5}\pi\right)$

（証明）

いろいろな証明ができると思いますが，よく知られているものを紹介しておきます。まず，$\theta = \dfrac{\pi}{5}, \dfrac{3}{5}\pi$ とすると，$\sin 3\theta = \sin 2\theta$ が成り立ち，3 倍角と 2 倍角の公式から，$3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ となり，$\theta = \dfrac{\pi}{5}$ ですから，$\sin\theta \fallingdotseq 0$ より，$3 - 4\sin^2\theta = 2\cos\theta$ から $3 - 4(1-\cos^2\theta) = 2\cos\theta$ よって，$(2\cos\theta)^2 - (2\cos\theta) - 1 = 0$ となります。

これから，2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解が，$2\cos\dfrac{\pi}{5}$ と $2\cos\dfrac{3}{5}\pi$ となり，$x^2 - x - 1 = \left(x - 2\cos\dfrac{\pi}{5}\right)\left(x - 2\cos\dfrac{3\pi}{5}\right)$ と公式①が成立します。

次に $\theta = \dfrac{2}{5}\pi, \dfrac{4}{5}\pi$ とすると，$\sin 3\theta = -\sin 2\theta$ となるので，少し符号が変化して，$x^2 + x - 1 = 0$ の 2 つの解が，$2\cos\dfrac{2}{5}\pi, 2\cos\dfrac{4}{5}\pi$ となり，$x^2 + x - 1 = \left(x - 2\cos\dfrac{2}{5}\pi\right)\left(x - 2\cos\dfrac{4}{5}\pi\right)$ と公式②が成立します。

$2\cos\dfrac{\pi}{5}, 2\cos\dfrac{3}{5}\pi$ と，$2\cos\dfrac{2}{5}\pi, 2\cos\dfrac{4}{5}\pi$ を解に持つ 4 次方程式 $(x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$ の左辺を $(x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1) = (x^2 - 1)^2 - x^2 = x^4 - 3x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 5x^2$ のように変形することにより，③と④が求まります。（順番を入れ替えただけです。）(証明終)

特に公式③は後でよく使うので，$f(x)$ と置いておきます。

積公式 B

① $2\cos\dfrac{\pi}{5} \cdot 2\cos\dfrac{2}{5}\pi = 1$　　② $2\sin\dfrac{\pi}{5} \cdot 2\sin\dfrac{2}{5}\pi = \sqrt{5}$

（証明）

$2\cos\dfrac{\pi}{5} \cdot 2\cos\dfrac{2}{5}\pi = f(0) = 0^2 - \sqrt{5}\cdot 0 + 1 = 1$ なので①が成立します。

次に半角の公式により，$\left(2\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^2 = 2 - 2\cos\dfrac{2}{5}\pi$，$\left(2\sin\dfrac{2}{5}\pi\right)^2 = 2 - 2\cos\dfrac{4}{5}\pi$ ですから，公式 A の②$x^2 + x - 1 = \left(x - 2\cos\dfrac{2}{5}\pi\right)\left(x - 2\cos\dfrac{4}{5}\pi\right)$ で，$x = 2$ を代入することにより，$4 + 2 - 1 = \left(2\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^2\left(2\sin\dfrac{2}{5}\pi\right)^2$ が得られ，$2\sin\dfrac{\pi}{5} \cdot 2\sin\dfrac{2}{5}\pi = \sqrt{5}$ が示せました。

（証明終）

（参考）

$2\cos\dfrac{\pi}{5} \cdot 2\cos\dfrac{2}{5}\pi = 1$ だけを示すのなら，

$$\sin\frac{\pi}{5} \cdot 2\cos\frac{\pi}{5} \cdot 2\cos\frac{2}{5}\pi = \sin\frac{2}{5}\pi \cdot 2\cos\frac{2}{5}\pi = \sin\frac{4}{5}\pi = \sin\frac{\pi}{5}$$

の両辺を $\sin\dfrac{\pi}{5}$ で割ると楽です。

また，$\sin\dfrac{\pi}{5}$ を解にもつ方程式を作りたいなら，$\sin 3\theta = \sin 2\theta$ から，3 倍角と 2 倍角の公式を使った後，両辺を 2 乗して，

$$(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)^2 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$9\sin^2\theta - 24\sin^4\theta + 16\sin^6\theta = 4\sin^2\theta(1 - \sin^2\theta)$$

両辺を $\sin^2\theta$ で割って整理すると，$(2\sin\theta)^4 - 5(2\sin\theta)^2 + 5 = 0$ となります。4 次方程式 $x^4 - 5x^2 + 5 = 0$ の 4 つの解が，$\pm 2\sin\frac{\pi}{5}, \pm 2\sin\frac{2}{5}\pi$ となり，解と係数の関係から，$\left(2\sin\frac{\pi}{5}\right)^2\left(2\sin\frac{2}{5}\pi\right)^2 = 5$ が得られるので，$2\sin\frac{\pi}{5}\cdot 2\sin\frac{2}{5}\pi = \sqrt{5}$ がわかります。また，$\dfrac{\sin\frac{2}{5}\pi}{\sin\frac{\pi}{5}} = 2\cos\frac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ も成立しています。

この $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ は，2 次体 $Q(\sqrt{5})$ の基本単数と呼ばれるものになっています。

3 $\cos\dfrac{\pi}{40}$ の数論的な積公式

公式 A の③をうまく使うと，$\cos\frac{\pi}{40}$ とか，$\cos\frac{\pi}{60}$ に関係した数論的な積公式が作れます。これは，ディリクレの類数公式と関係があるのですが，それは，「現代数学の源流」[1] の p.215 などをご覧下さい。公式 C に出てきている 1, 3, 9, 13 という数字は，適当な数を取ってきている訳ではなく，$2\cos\frac{13}{40}\pi = -2\cos\frac{27}{40}\pi$ ですから，1, 3, 9, 27 と，一応きれいに並ぶ数字なのだということだけ注意しておきます。

数論的積公式 C

① $2\cos\dfrac{\pi}{40}\cdot 2\cos\dfrac{3}{40}\pi\cdot 2\cos\dfrac{9}{40}\pi\cdot 2\cos\dfrac{13}{40}\pi = 3+\sqrt{10}$

② $2\sin\dfrac{\pi}{40}\cdot 2\sin\dfrac{3}{40}\pi\cdot 2\sin\dfrac{9}{40}\pi\cdot 2\sin\dfrac{13}{40}\pi = -3+\sqrt{10}$

（証明）

積和の公式から，$\theta = \frac{\pi}{40}$ とすると，

$$2\cos\theta\cdot 2\cos 9\theta = 2\cos 10\theta + 2\cos 8\theta = \sqrt{2} + 2\cos\frac{\pi}{5}$$

$$2\cos 3\theta\cdot 2\cos 13\theta = 2\cos 16\theta + 2\cos 10\theta = \sqrt{2} + 2\cos\frac{2}{5}\pi$$

となり，因数分解の公式 A の③$f(x) = x^2 - \sqrt{5}x + 1 = \left(x - 2\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(x - 2\cos\frac{2}{5}\pi\right)$ で，$x = -\sqrt{2}$ を代入した式になっています。つまり，

$$2\cos\theta\cdot 2\cos 9\theta\cdot 2\cos 3\theta\cdot 2\cos 13\theta = f(-\sqrt{2}) = 2+\sqrt{10}+1 = 3+\sqrt{10}$$

となり，公式 C の①が成立します。

後は同様に，

$$2\sin\theta\cdot 2\sin 9\theta = -2\cos 10\theta + 2\cos 8\theta = -\sqrt{2} + 2\cos\frac{\pi}{5}$$

$$2\sin 3\theta\cdot 2\sin 13\theta = -2\cos 16\theta + 2\cos 10\theta = \sqrt{2} - 2\cos\frac{2}{5}\pi$$

より，$2\sin\theta\cdot 2\sin 9\theta\cdot 2\sin 3\theta\cdot 2\sin 13\theta = -f(-\sqrt{2}) = -(2-\sqrt{10}+1) = -3+\sqrt{10}$ となります。（証明終）

$\frac{\pi}{2}-\theta$ の公式を使うと，$2\sin\frac{7}{40}\pi = 2\cos\frac{13}{40}\pi$，$2\sin\frac{11}{40}\pi = 2\cos\frac{9}{40}\pi$，$2\sin\frac{17}{40}\pi = 2\cos\frac{3}{40}\pi$，$2\sin\frac{19}{40}\pi = 2\cos\frac{\pi}{40}$ となることから，$\theta=\frac{\pi}{40}$ とするとき，

$$\frac{\sin 7\theta\sin 11\theta\sin 17\theta\sin 19\theta}{\sin\theta\sin 3\theta\sin 9\theta\sin 13\theta}=(3+\sqrt{10})^2$$

となることもわかり，また，この式は，$(2\cos\theta\cdot 2\cos 3\theta\cdot 2\cos 9\theta\cdot\cos 13\theta)^2$ にもなっているので，左辺の値を求めるだけなら，公式 C の①だけがわかれば，充分でした。

4　$\cos\frac{\pi}{60}$ の数論的な積公式

数論的積公式 D

① $2\cos\frac{\pi}{60}\cdot 2\cos\frac{7}{60}\pi\cdot 2\cos\frac{11}{60}\pi\cdot 2\cos\frac{17}{60}\pi=4+\sqrt{15}$

② $2\sin\frac{\pi}{60}\cdot 2\sin\frac{7}{60}\pi\cdot 2\sin\frac{11}{60}\pi\cdot 2\sin\frac{17}{60}\pi=4-\sqrt{15}$

（証明）

積和の公式から，$\theta=\frac{\pi}{60}$ とすると，

$$2\cos\theta\cdot 2\cos 11\theta=2\cos 12\theta+2\cos 10\theta=\sqrt{3}+2\cos\frac{\pi}{5}$$

$$2\cos 7\theta\cdot 2\cos 17\theta=2\cos 24\theta+2\cos 10\theta=\sqrt{3}+2\cos\frac{2}{5}\pi$$

となり，因数分解の公式 A の③$f(x)=x^2-\sqrt{5}x+1=\left(x-2\cos\frac{\pi}{5}\right)\left(x-2\cos\frac{2}{5}\pi\right)$ で，$x=-\sqrt{3}$ を代入することにより，公式 D の①の左辺 $=f(-\sqrt{3})=3+\sqrt{15}+1=4+\sqrt{15}$ となります。後は，まったく同様に，公式 D の②の左辺 $=f(\sqrt{3})=3-\sqrt{15}+1=4-\sqrt{15}$ となります。（証明終）

この場合も，$2\sin\frac{13}{60}\pi=2\cos\frac{17}{60}\pi$ などに注意して，$\theta=\frac{\pi}{60}$ とするとき，

$$\frac{\sin 13\theta\sin 19\theta\sin 23\theta\sin 29\theta}{\sin\theta\sin 7\theta\sin 11\theta\sin 17\theta}=(4+\sqrt{15})^2$$

となっていることがわかります。またこの式は，

$$(2\cos\theta\cdot 2\cos 7\theta\cdot 2\cos 11\theta\cdot 2\cos 17\theta)^2$$

にもなっています。さらに，

$$(2\cos\theta\cdot 2\cos 11\theta\cdot 2\cos 12\theta\cdot 2\cos 25\theta)^2=\left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}\right)^2=4+\sqrt{15}$$

になっていることもわかりました。つまり，

$$(2\cos\theta\cdot 2\cos 7\theta\cdot 2\cos 11\theta\cdot\cos 17\theta)^2=(2\cos\theta\cdot 2\cos 11\theta\cdot 2\cos 12\theta\cdot\cos 25\theta)^4$$

というようにある cos の積の 4 乗になっている訳です。こういった，$2\cos\theta\cdot 2\cos 11\theta\cdot 2\cos 12\theta\cdot 2\cos 25\theta=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$，$2\sin\theta\cdot 2\sin 11\theta\cdot 2\sin 12\theta\cdot 2\sin 25\theta=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$ などには，単数の積の分解として，どういった意味があるのでしょうか。私はいまだによくわかっていません。どなたかご存じの方がいらっしゃいましたら，御教示下さい。

5 $\cos\dfrac{\pi}{7}$ の積公式

次に，$\cos\dfrac{\pi}{7}$ に関係した公式を作りたいのですが，それが，$\cos\dfrac{\pi}{5}$ のときとほとんど同様な方法で可能なのです。また特に公式 E の③は後でよく使うので，$g(x)$ と置いておきます。

数論的積公式 E

$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ とすると

① $x^3-x^2-2x+1=(x-2\cos\theta)(x-2\cos 3\theta)(x-2\cos 5\theta)$
② $x^3+x^2-2x-1=(x-2\cos 2\theta)(x-2\cos 4\theta)(x-2\cos 6\theta)$
③ $g(x)=x^3+\sqrt{7}x^2-\sqrt{7}=(x-2\cos\theta)(x+2\sin 2\theta)(x+2\sin 3\theta)$
④ $x^3-\sqrt{7}x^2+\sqrt{7}=(x+2\sin\theta)(x-2\sin 2\theta)(x-2\sin 3\theta)$

（証明）

$\theta=\dfrac{\pi}{7}$，$\dfrac{3}{7}\pi$，$\dfrac{5}{7}\pi$ とすると，$\sin 3\theta=\sin 4\theta$ が成り立ち，3 倍角と 2 倍角の公式から，$3\sin\theta-4\sin^3\theta=4\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta$ となり，$\sin\theta\fallingdotseq 0$ より，$3-4\sin^2\theta=4\cos\theta\cos 2\theta$ から $3-4(1-\cos^2\theta)=4\cos\theta(2\cos^2\theta-1)$，$(2\cos\theta)^3-(2\cos\theta)^2-2(2\cos\theta)+1=0$ となります。つまり，3 次方程式 $x^3-x^2-2x+1=0$ の 3 つの解が，$2\cos\dfrac{\pi}{7}$，$2\cos\dfrac{3}{7}\pi$，$2\cos\dfrac{5}{7}\pi$ とわかり，$x^3-x^2-2x+1=(x-2\cos\theta)(x-2\cos 3\theta)(x-2\cos 5\theta)$ が成立します。

次に $\theta=\dfrac{2}{7}\pi$，$\dfrac{4}{7}\pi$，$\dfrac{6}{7}\pi$ とすると，$\sin 3\theta=-\sin 4\theta$ となり，少し符号が変化して，$x^3+x^2-2x-1=(x-2\cos 2\theta)(x-\cos 4\theta)(x-2\cos 6\theta)$ となります。

また，$\sin 3\theta=\sin 4\theta$ から，$(3\sin\theta-4\sin^3\theta)^2=16\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)(1-\sin^2\theta)^2$ 両辺を $\sin^2\theta$ で割って整理すると，$(2\sin\theta)^6-7(2\sin\theta)^4+14(2\sin\theta)^2-7=0$ となり 6 次方程式 $x^6-7x^4+14x^2-7=0$ の 6 つの解が，$\pm 2\sin\dfrac{\pi}{7}$，$\pm 2\sin\dfrac{2}{7}\pi$，$\pm 2\sin\dfrac{3}{7}\pi$ なのです。ここで，$x^6-7x^4+14x^2-7=x^6-7(x^2-1)^2$ となっていることに気がつくと，この 6 次方程式は，$(x^3+\sqrt{7}x^2-\sqrt{7})(x^3-\sqrt{7}x^2+\sqrt{7})=0$ と分解できて，$x^3+\sqrt{7}x^2-\sqrt{7}=0$ の解が $2\sin\dfrac{\pi}{7}$，$-2\sin\dfrac{2}{7}\pi$，$-2\sin\dfrac{3}{7}\pi$ で $x^3-\sqrt{7}x^2+\sqrt{7}=0$ の解が $-2\sin\dfrac{\pi}{7}$，$2\sin\dfrac{2}{7}\pi$，$2\sin\dfrac{3}{7}\pi$ であることがわかります。これから，$x^3+\sqrt{7}x^2-\sqrt{7}=\left(x-2\sin\dfrac{\pi}{7}\right)\left(x+2\sin\dfrac{2}{7}\pi\right)\left(x+2\sin\dfrac{3}{7}\pi\right)$ $x^3-\sqrt{7}x^2+\sqrt{7}=\left(x+2\sin\dfrac{\pi}{7}\right)\left(x-2\sin\dfrac{2}{7}\pi\right)\left(x-2\sin\dfrac{3}{7}\pi\right)$ と因数分解できる訳です。

（証明終）

数論的積公式 F

$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ とすると

① $2\cos\dfrac{\pi}{7}\cdot 2\cos\dfrac{2}{7}\pi\cdot 2\cos\dfrac{3}{7}\pi=1$

② $2\sin\frac{\pi}{7}\cdot 2\sin\frac{2}{7}\pi\cdot 2\sin\frac{3}{7}\pi=\sqrt{7}$

（証明）

因数分解の公式Eの①つまり，$x^3-x^2-2x+1=(x-2\cos\theta)(x-2\cos 3\theta)(x-2\cos 5\theta)$ で $x=0$ を代入すると，$2\cos\frac{\pi}{7}\cdot 2\cos\frac{3}{7}\pi\cdot 2\cos\frac{5}{7}\pi=-1$ が得られます。ここで，$2\cos\frac{5}{7}\pi=-2\cos\frac{2}{7}\pi$ なので，$2\cos\frac{\pi}{7}\cdot 2\cos\frac{2}{7}\pi\cdot 2\cos\frac{3}{7}\pi=1$ が示せました。次に半角の公式により，$\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^2=2-2\cos\frac{2}{7}\pi$，$\left(2\sin\frac{2}{7}\pi\right)^2=2-2\cos\frac{4}{7}\pi$，$\left(2\sin\frac{3}{7}\pi\right)^2=2-2\cos\frac{6}{7}\pi$ より，因数分解の公式Eの② つまり，$x^3+x^2-2x-1=(x-2\cos 2\theta)(x-2\cos 4\theta)(x-2\cos 6\theta)$ で，$x=2$ を代入することにより，$8+4-4-1=\left(2\sin\frac{\pi}{7}\right)^2\left(2\sin\frac{2}{7}\pi\right)^2\left(2\sin\frac{3}{7}\pi\right)^2$ となるので，$2\sin\frac{\pi}{7}\cdot 2\sin\frac{2}{7}\pi\cdot 2\sin\frac{3}{7}\pi=\sqrt{7}$ が示せました。（証明終）

6 $\cos\frac{\pi}{28}$ の数論的な積公式

因数分解の公式Eの③, つまり，$g(x)=x^3+\sqrt{7}x^2-\sqrt{7}=(x-2\cos\theta)(x+2\sin 2\theta)(x+2\sin 3\theta)$ をうまく使うと，$\cos\frac{\pi}{28}$ に関係した数論的積公式Gが得られます。

数論的積公式G

① $2\cos\frac{\pi}{28}\cdot 2\cos\frac{3}{28}\pi\cdot 2\cos\frac{9}{28}\pi=\frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

② $2\sin\frac{\pi}{28}\cdot 2\sin\frac{3}{28}\pi\cdot 2\sin\frac{9}{28}\pi=\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

（証明）

$$
\begin{aligned}
&\left(2\cos\frac{\pi}{28}\right)^2\left(2\cos\frac{3}{28}\pi\right)^2\left(2\cos\frac{9}{28}\pi\right)^2\\
&=\left(2+2\cos\frac{\pi}{14}\right)\left(2+2\cos\frac{3}{14}\pi\right)\left(2+2\cos\frac{9}{14}\pi\right)\\
&=\left(2+2\cos\frac{\pi}{14}\right)\left(2+2\cos\frac{3}{14}\pi\right)\left(2-2\cos\frac{5}{14}\pi\right)\\
&=\left(2+2\sin\frac{3}{7}\pi\right)\left(2+2\sin\frac{2}{7}\pi\right)\left(2-2\sin\frac{\pi}{7}\right)\\
&=g(2)=8+4\sqrt{7}-\sqrt{7}=8+3\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

となります。同様に，

$$\left(2\sin\frac{\pi}{28}\right)^2\left(2\sin\frac{3}{28}\pi\right)^2\left(2\sin\frac{9}{28}\pi\right)^2$$

$$= \left(2 - 2\sin\frac{3}{7}\pi\right)\left(2 - 2\sin\frac{2}{7}\pi\right)\left(2 + 2\sin\frac{\pi}{7}\right) = 8 - 3\sqrt{7}$$

となります。(最後の等号は, 因数分解の公式Eの④で, $x = 2$を代入しました。) これから, 2重根号をとると $2\cos\frac{\pi}{28}\cdot 2\cos\frac{3}{28}\pi\cdot 2\cos\frac{9}{28}\pi = \frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$, $2\sin\frac{\pi}{28}\cdot 2\sin\frac{3}{28}\pi\cdot 2\sin\frac{9}{28}\pi = \frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ が成立します。 (証明終)

これも $\theta = \frac{\pi}{28}$ とすると, $\frac{\sin 5\theta\sin 11\theta\sin 13\theta}{\sin\theta\sin 3\theta\sin 9\theta} = (2\cos\theta\cdot 2\cos 3\theta\cdot 2\cos 9\theta)^2 = 8 + 3\sqrt{7}$ となってます。

7 過去の入試問題①〜⑤の解説

① $\cos\frac{2}{7}\pi + \cos\frac{4}{7}\pi + \cos\frac{6}{7}\pi$ の値(慶応大学)
② $\cos\frac{2}{7}\pi\cdot\cos\frac{4}{7}\pi\cdot\cos\frac{6}{7}\pi$ の値(東京慈恵会医科大学)
③ $\cos\frac{2}{7}\pi$ の小数第1位の数(大阪大学)

この3つの問題は, 因数分解の公式Eの②つまり,

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = \left(x - 2\cos\frac{2}{7}\pi\right)\left(x - 2\cos\frac{4}{7}\pi\right)\left(x - 2\cos\frac{6}{7}\pi\right)$$

を使えば, 一発ですね。解と係数の関係より,

$$2\cos\frac{2}{7}\pi + 2\cos\frac{4}{7}\pi + 2\cos\frac{6}{7}\pi = -1$$

$$2\cos\frac{2}{7}\pi\cdot 2\cos\frac{4}{7}\pi\cdot 2\cos\frac{6}{7}\pi = 1$$

なので,

$$\cos\frac{2}{7}\pi + \cos\frac{4}{7}\pi + \cos\frac{6}{7}\pi = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{2}{7}\pi\cdot\cos\frac{4}{7}\pi\cdot\cos\frac{6}{7}\pi = \frac{1}{8}$$

が答えとなります。

また, $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ の実数解は, $2 > \alpha > 1 > \beta > -1 > \gamma > -2$ となっていて, 一番大きな解が, $2\cos\frac{2\pi}{7}$ ですから, $1.\cdots\cdots$ となります。
代入してチェックすると, 1.2 と 1.3 の間とわかり, $\cos\frac{2}{7}\pi = 0.6\cdots\cdots$ となります。(正確な値は $\cos\frac{2\pi}{7} = 0.62349\cdots\cdots$ です。)

④ $\cos\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{3}{10}\pi\cdot\cos\frac{7}{10}\pi\cdot\cos\frac{9}{10}\pi$ の値(京都大学)

積和の公式から，$\theta=\dfrac{\pi}{10}$ とすると，

$$2\cos\theta\cdot 2\cos 9\theta=2\cos 10\theta+2\cos 8\theta=-2+2\cos\frac{4}{5}\pi$$

$$2\cos 3\theta\cdot 2\cos 7\theta=2\cos 10\theta+2\cos 4\theta=-2+2\cos\frac{2}{5}\pi$$

因数分解の公式 A の②$x^2+x-1=\left(x-2\cos\dfrac{2}{5}\pi\right)\left(x-2\cos\dfrac{4}{5}\pi\right)$ より，$2\cos\theta\cdot 2\cos 9\theta\cdot 2\cos 3\theta\cdot 2\cos 7\theta=2^2+2-1=5$. つまり $\cos\dfrac{\pi}{10}\cdot\cos\dfrac{3}{10}\pi\cdot\cos\dfrac{7}{10}\pi\cdot\cos\dfrac{9}{10}\pi=\dfrac{5}{16}$ が答えです。

⑤ n が自然数のとき，$\cos^n\dfrac{\pi}{7}+\cos^n\dfrac{3}{7}\pi+\cos^n\dfrac{5}{7}\pi$ の値は，有理数であることを証明せよ。

(証明)

これは，因数分解の公式 E の①より，$2\cos\dfrac{\pi}{7}$，$2\cos\dfrac{3}{7}\pi$，$2\cos\dfrac{5}{7}\pi$ を解にもつ 3 次方程式が $x^3-x^2-2x+1=0$ なので，$\alpha=\cos\dfrac{\pi}{7}$，$\beta=2\cos\dfrac{5}{7}\pi$，$\gamma=2\cos\dfrac{5}{7}\pi$，$S_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ とおけば，$\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1=0$ から $\alpha^{n+3}-\alpha^{n+2}-2\alpha^{n+1}+\alpha^n=0$ となり，β，γ も同様な式が成り立ちますから，$S_{n+3}=S_{n+2}+2S_{n+1}-S_n$ という漸化式が成り立ちます。

ここで，

$$S_1=\alpha+\beta+\gamma=1$$

$$S_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=1-2\times(-2)=5$$

$$\begin{aligned}S_3&=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha^2+2\alpha-1)+(\beta^2+2\beta-1)+(\gamma^2+2\gamma-1)\\&=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2(\alpha+\beta+\gamma)-3\\&=5+2\times 1-3=4\end{aligned}$$

となるので，n が 4 以上なら後は，S_n がすべて有理数になることがわかります。2^n は有理数なので，$\cos^n\dfrac{\pi}{7}+\cos^n\dfrac{3}{7}\pi+\cos^n\dfrac{5}{7}\pi=\dfrac{S_n}{2^n}$ ももちろん有理数になります。（証明終）

今回，いろいろな実験をしている内に，結局 sin と cos の問題というより，代数的整数論の話なのだということがやっとわかりました。2 次体 $Q\left(\cos\dfrac{\pi}{5}\right)$ とか，3 次体 $Q\left(\cos\dfrac{\pi}{7}\right)$ の話として考えればいい訳です。ただその方向は，あまりにも高校数学と離れてしまうので，またの機会としたいと思います。

参考文献

[1] 佐竹一郎，現代数学の源流　上，朝倉書店，2007 年

[2] 安田亨，入試数学　 伝説の良問 100，講談社ブルーバックス，2003 年