# 循環節

県立松戸高等学校 広川 久晴

## 1 はじめに

142857 は不思議な数です。2 倍すると 285714，3 倍すると 428571，4 倍すると 571428，6 倍すると 857142，7 倍すると 999999。魔法のように同じ数の並びが繰り返すので導入で使えそうです。しかし，これは $\frac{1}{7}$ の循環節の長さが 6，循環節が 142857 であることから当然なのです。循環節を考えるとこのような数がいくらでも見つかります。

私は昨年，数学 A の整数論に入った最初の授業で循環表現を教えたすぐ後に，$\frac{1}{2}$ から $\frac{16}{17}$ までの 72 個の分数の小数表示を求める課題を出しました。「電卓を使ってもよいが筆算の方が楽だよ」と言いながら机間巡視をし，間違っているところをどんどん指摘してゆきます。循環節の長さを覚えていると簡単に指摘ができます。手を抜いて途中で済ませている生徒などすぐに分かります。また正直に $2 \div 7$，$3 \div 7$，$4 \div 7 \cdots$ を計算している生徒には「$1 \div 7$ の結果を使うと手抜きできるよ」などとコツを教えます。楽しいひと時です。この稿の最後に純循環となる 1000 までの逆数の循環節の長さの一覧表（表 1）を付けておきました。今から 20 年前に UBASIC で計算したものです。昨年より数学 A に整数論が入ったのを機に循環節に関するいくつかの事実を紹介します。

この稿では $\frac{1}{n}$ の循環節の長さを $\ell$ または $\ell(n)$ で表します。また素数を $p$ で表わします。

## 2 循環の区別

(i) 有限小数。割り切れて循環しない。分母の素因数が 2 と 5 のみのとき。
(ii) 純循環。小数 1 位より循環。分母の素因数に 2 も 5 も含まないとき。
(iii) 混循環。小数 2 位以下より循環。(i)(ii) 以外。

理由は略します。

教科書には純循環，混循環の言葉はありませんがとても分かりやすいので私は授業で紹介し，課題の結果欄に書かせています。

## 3 循環節の長さ

純循環となるときの循環節の長さを見てみましょう。3，7，9，11，13，17，19，21，23，27，29 の逆数の循環節の長さは 1，6，1，2，6，16，18，6，22，3，28 なので，法則がないように

見えます。素数と合成数を分けてみても，素数 3，7，11，13，17，19，23，29，31，37 の長さが 1, 6, 2, 6, 16，18，22，28，15，3 で，合成数 9，21，27，33，39，49，51，57 の長さが 1，6，3，2，6，42，16，18 です。素数は $\ell = n-1$ となることが半分程，合成数は $\ell < n-1$ となっています。まず素数に挑戦。

## (1)　循環節の長さとは

まずその求め方。

**方法 1.** $1 \div n$ を筆算で計算し，余り 1 が出れば以後同じことを繰り返すので循環節とその長さが求まる。

しかし，そもそも循環節とは何でしょうか。例えば $\dfrac{1}{7}$ の循環節 142857 の意味は何か。これは数学 III では等比級数の和で定義されますが，1 年生は循環小数を $x$ とおいて両辺 1000000 倍し辺々引いて $x = \dfrac{142857}{999999} = \dfrac{1}{7}$ と求めます。最後の約分は互除法が役に立ちますが，使わなくても 11 や 13 で割っていけばどうにかできます。ただこの方法，結果は正しいのですが，無限級数を収束の論議なく行っているので教師側は危ないことをやっているという意識が必要です。

意味に戻しましょう。上の $\dfrac{142857}{999999}$ が示すように $\dfrac{1}{n} = \dfrac{N}{10^{\ell}-1}$ となる最小の自然数 $N$，$\ell$ がそれぞれ循環節とその長さです。これより

**方法 2.** 9，99，999，9999$\cdots$ を $n$ で割っていき，割り切れればその商が循環節。計算するときは 99999$\cdots$ を $n$ で割っていき割り切れたところで循環節 $N$ を得る。

## (2)　循環節の存在

方法 1 では，筆算の余りは $n$ より小さいので，余りは $n-1$ 個しかありません。よって最悪でも $n$ 番目には今まで出た余りと同じ余りが出現し，以後繰り返します。

方法 2 ではオイラーの定理を使います。「$a$，$n$ が素なら $a^f \equiv 1 \pmod{n}$ ただし $f$ は $n$ 以下で $n$ と互いに素な数の個数」これより $a^f - 1 \equiv 0$ よって最悪でも $10^{n-1}-1$ が $n$ で割り切れる。

しかし落ち着いて考えれば，1000$\cdots$ を $n$ で割り 1 余るまで計算することと，999$\cdots$ を $n$ で割り切れるまで計算することは同じです。

たとえば $1 \div 7$ を筆算で求めると余りは 3，2，6，4，5，1 と出て以後繰り返しますが，999$\cdots$ を 7 で割れば余りは 2，1，5，3，4，0 とすべて 1 だけ少ない数が出ます。もともと 1 少ない数から始めたと考えれば同じことになる訳です。

## (3)　素数の循環節の長さ

素数 $p$ では $f = p-1$ なので，$\ell$ は最悪でも $p-1$ となることは分かりましたが，$p = 3$，11，13，31，37 のときは $p-1$ より小さい。これは方法 2 で考えると分かりやすい。$p = 3$ のとき

は $10^2-1=99$ を待たず 9 が 3 で割り切れ，$p=11$ のときも $10^{10}-1=9999999999$ を待たず 99 が 11 で割り切れてしまう。

それでは $10^k-1$ の素因数分解が分かっていればすぐ $\ell$ が分かるのですが，$10^k-1$ は $k$ 桁の数なので因数分解は難しいのです。

$10^k-1$，これは 9 が $k$ 個並ぶ数なので当然 9 で割り切れます。因数分解は 9 で割った $\dfrac{10^k-1}{9}$，つまり $111\cdots111$ と 1 が $k$ 個ならぶ数を考えます。これをレピュニットといい，$R_k$ で表します。私が計算したのは UBASIC の限界 $R_{16}$ まででしたので後ろに $R_{16}$ までの素因数分解の表 2 を付けておきます。今ネットの Wikipedia の「レピュニット」のページには $R_{72}$ までの素因数分解が出ています。レピュニット，初めは $R_2=\underline{11}$，$R_3=3\cdot\underline{37}$，$R_4=11\cdot\underline{101}$，$R_5=\underline{41}\cdot\underline{271}$，$R_6=3\cdot\underline{7}\cdot 11\cdot\underline{13}\cdot 37$，$R_7=\underline{239}\cdot\underline{4649}$。下線は初めて出る数，3 は除外。

これを見ると $\ell=3$ となる素数は $p=37$，$\ell=5$ となる素数は $p=41$ と 271 しかないことが分かります。しかしこの表いつもある訳でもないですし，$R_{73}$ から先はありません。やはり $\ell$ を求めるのは割り算が早いのです。

もう少し見通しを持つために，$\ell$ の性質を示します。

**性質 1** 素数 $p$ の逆数の循環節の長さ $\ell$ は $p-1$ の約数に限る。

(証明) $10^{p-1}-1\equiv 0$，$10^{\ell}-1\equiv 0 \pmod p$ で $\ell$ が $p-1$ の約数でないならば，$p-1=q\ell+r$，$0<r<\ell$ となる $q$，$r$ が存在する。このとき

$$10^{p-1}-1=10^{q\ell+r}-1=10^{q\ell}\times 10^r-10^r+10^r-1=(10^{q\ell}-1)10^r+10^r-1$$

$10^{\ell}=x$ とおくと，

$$\text{与式}=(x^q-1)10^r+10^r-1=(x-1)(x^{q-1}+x^{q-2}+\cdots+1)10^r+10^r-1$$

ここに $10^{p-1}-1\equiv 0$，$10^{\ell}-1\equiv 0$ を代入すると $10^r-1\equiv 0$ かつ $r<\ell$，となるので $\ell$ の最小性に矛盾する。

よって $\ell$ は $p-1$ の約数。 証明終

簡単に書くと，$p-1$ 桁の $999\cdots999$ と $\ell$ 桁の $99\cdots99$ がともに $p$ で割り切れれば，$p-1$ を $\ell$ で割った余り $r$ 桁の $9\cdots9$ も $p$ で割り切れるので矛盾ということです。

(例) $p=13, 31, 37$ の循環節の長さはそれぞれ 6, 15, 3 で確かに 12, 30, 36 の約数です。

性質 1 より素数 $p$ の循環節は $1\div p$ の筆算を $\dfrac{p-1}{2}$ 桁まで行い余り 1 が出なければ $\ell$ は最悪の $p-1$ となります。しかしこのとき，ここまでの計算で残りすべての商が求まることを後で示します。

## (4) 合成数の循環節の長さ

**性質 2** $m$，$n$ が素なら $\ell(mn)=\mathrm{LCM}(\ell(m),\ell(n))$

(理由) $\ell(m)$ 桁の $999\cdots999$ が $m$ で割り切れ，$\ell(n)$ 桁の $99\cdots99$ が $n$ で割り切れるならば $\mathrm{LCM}(\ell(m),\ell(n))$ 桁の $9999\cdots9999$ は $mn$ で割り切れます。

必要条件は，$\ell(mn)$ 桁の $999\cdots999$ が $m$ で割り切れるには性質 1 の証明のように $\ell(mn)$ は $\ell(m)$ の倍数であること，同時に $\ell(n)$ の倍数であることが必要。これより $\ell(mn)$ は $\ell(m)$ と $\ell(n)$ の公倍数。　理由終

ネットの Wikipedia「循環小数」の循環節の長さの欄に「$n$ の循環節の長さは $n$ の最大の素因数を $p$ とするとたかだか $p-1$ 桁」とありますが誤りです。

例えば $n = 17 \times 19$ のとき，$\ell = 144$ ですが，これは $p - 1 = 18$ を越えています。整数の世界では素因数の大小はあまり意味がありません。Wikipedia を見るときは誤りがあるので注意が必要です。

**性質 3** ネットの　奥村清志「循環小数についての種々の考察 - Biglobe[*1] 」によれば

$p = 3, 487$ のとき

$$\ell(p^k) = p^{k-2}\ell(p)$$

それ以外の 100 万以下の素数のとき

$$\ell(p^k) = p^{k-1}\ell(p)$$

性質 2 と性質 3 より，合成数は $\ell < n - 1$ となることが分かります。

# 4　ダイヤル数

初めに示した 142857 はダイヤル数と呼ばれています。巡回数と呼ぶこともありますが，私はくるくる回るダイヤル数の方を使います。

ダイヤル数を $k$ 倍しても同じ順序で出る理由は単純です。例えば $1 \div 7$ から出した 142857 を 2 倍することは $2 \div 7$ を計算することです。異なるのは $1 \div 7$ の商が余り 1 から始まりますが，$2 \div 7$ は余り 2 から始まるだけなので，同じ順序で商が出てくるのです。

ダイヤル数は $n$ 未満のすべての余りが出る必要から，$n$ は $\ell = n - 1$ のときの循環節です。$n = 7$ の次に $\ell = n - 1$ となるのは素数が必要条件なので素数を見ていきます。見つかるのは $n = 17$ なので 2 番目のダイヤル数はこの循環節 0588235294117647 です。ダイヤル数の性質を使えば $\dfrac{2}{17}$ は最初の 2 桁まで計算すればあとの 14 桁は前の 0588235294117647 から今計算した 2 桁の数を先頭にして残り 14 個の数字をこの順で書けばいいだけです。2 桁なのは 1 桁だけではどこが先頭か決まらないことが多いからです。これも生徒に教えたところ，まだ課題が終わっていない生徒には大きな助けとなりました。

# 5　循環節を半分にする

142857 にはもう一つ大切な性質があります。それは前半 142 と後半 857 に分けて足すと 999 になるのです。ですから私は $\dfrac{1}{7}$ の循環節は前半の 142 だけ覚えています。後半はそれぞれの 9 の補数 8,5,7 です。

[*1] http://www2r.biglobe.ne.jp/kosanhp/math/junkan.html

**性質 4** $\dfrac{1}{n}$ が $2k$ 桁の循環節を持ち，さらにその前半と後半の和が $99\cdots99$ となるのは

(1) 必要十分条件は，$n$ が $10^k+1$ の因数であること

(2) 同じく，$1 \div n$ で $k$ 桁目の余りが $n-1$ となること

(3) 十分条件は，$n$ が素数でその循環節の長さが偶数であること
理由はすべて略しますが詳しく知りたい方は，数学セミナー 1994 年 3 月号をご覧下さい。また，最後に私が分解した $10^k+1$ の表も付けておきます。この性質から次の性質が出てきます。

(4) 素数 $p$ に対して $1 \div p$ の筆算で $\dfrac{p-1}{2}$ 桁まで計算し余り 1 が出なければ，その時の余りは $p-1$，かつ商のその後はこれまでの商の 9 の補数が並ぶ。

(5) $1 \div n$ の筆算で $k$ 桁目の余りが $n-1$ ならば，$\ell = 2k$ で後半の商は今までの商の 9 の補数が並ぶ。

この循環節を半分にして足すという操作，$\dfrac{1}{33}$ の循環節 03 などは半分に割って足すと 3 が並びます。このように 9 以外の数が並ぶこともありますし，同じ数が並ばないときもあります。理論よりやってみる方が早いのでこれまた 1000 以下の数について循環節の長さの一覧表の横に付けておきましたのでご覧下さい。

**表 1** 循環節の長さ

表の記号は 2 つの部分に分かれており，左の部分は循環節の長さ，右の部分の 1 文字目は，p は素数，空白は合成数を表す。2 文字目は，循環節を半分にして足した時に並ぶ数字，x は同じ数が並ばない，- は循環節の長さが奇数で半分にできない，ことを表す。

たとえば，$\dfrac{1}{53}$ は，40: の行，13 の列を見て，13p- で，「循環節の長さ 13，53 は素数，長さが奇数で半分にできない」となります。

| | 1 | 3 | 7 | 9 | 11 | 13 | 17 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0: | | 1p- | 6p9 | 1 - | 2p9 | 6p9 | 16p9 | 18p9 |
| 20: | 6 6 | 22p9 | 3 - | 28p9 | 15p- | 2 3 | 3p- | 6 6 |
| 40: | 5p- | 21p- | 46p9 | 42 9 | 16 3 | 13p- | 18 6 | 58p9 |
| 60: | 60p9 | 6 8 | 33p- | 22 3 | 35p- | 8p9 | 6 9 | 13p- |
| 80: | 9 - | 41p- | 28 3 | 44p9 | 6 9 | 15 - | 96p9 | 2 1 |
| 100: | 4p9 | 34p9 | 53p- | 108p9 | 3 - | 112p9 | 6 5 | 48 x |
| 120: | 22 9 | 5 - | 42p9 | 21 - | 130p9 | 18 9 | 8p9 | 46p9 |
| 140: | 46 3 | 6 9 | 42 6 | 148p9 | 75p- | 16 7 | 78p9 | 13 - |
| 160: | 66 9 | 81p- | 166p9 | 78 9 | 18 2 | 43p- | 58 3 | 178p9 |
| 180: | 180p9 | 60 6 | 16 x | 6 x | 95p- | 192p9 | 98p9 | 99p- |
| 200: | 33 - | 84 x | 22 4 | 18 9 | 30p9 | 35 - | 30 x | 8 6 |
| 220: | 48 x | 222p9 | 113p- | 228p9 | 6 3 | 232p9 | 13 - | 7p- |
| 240: | 30p9 | 27 - | 18 9 | 41 - | 50p9 | 22 9 | 256p9 | 6 x |
| 260: | 28 1 | 262p9 | 44 3 | 268p9 | 5p- | 6 6 | 69p- | 15 - |
| 280: | 28p9 | 141p- | 30 x | 272 9 | 96 6 | 146p9 | 6 x | 66 9 |
| 300: | 42 x | 4 3 | 153p- | 34 6 | 155p- | 312p9 | 79p- | 28 x |
| 320: | 53 - | 144 x | 108 6 | 138 9 | 110p9 | 3 - | 336p9 | 112 3 |
| 340: | 30 x | 294 9 | 173p- | 116p9 | 6 x | 32p9 | 48 x | 179p- |
| 360: | 342 9 | 22 6 | 366p9 | 5 - | 78 x | 186p9 | 84 x | 378p9 |
| 380: | 42 6 | 382p9 | 21 - | 388p9 | 176 x | 130 3 | 99p- | 18 6 |
| 400: | 200p9 | 30 x | 6 x | 204p9 | 8 3 | 174 9 | 46 6 | 418p9 |
| 420: | 140p9 | 46 1 | 60 x | 6 3 | 215p- | 432p9 | 198 9 | 219p- |
| 440: | 42 5 | 221p- | 148 3 | 32p9 | 10 x | 75 - | 152p9 | 48 x |
| 460: | 460p9 | 154p9 | 233p- | 66 x | 78 6 | 42 x | 13 - | 239p- |
| 480: | 6 x | 66 3 | 486p9 | 81 - | 490p9 | 112 x | 210 x | 498p9 |
| 500: | 166 3 | 502p9 | 78 6 | 508p9 | 24 x | 18 x | 46 9 | 43 - |
| 520: | 52p9 | 261p- | 240 x | 506 9 | 58 4 | 30 x | 178 3 | 42 9 |
| 540: | 540p9 | 180 6 | 91p- | 60 8 | 252 x | 78 x | 278p9 | 42 x |
| 560: | 16 x | 281p- | 18 x | 284p9 | 570p9 | 95 - | 576p9 | 192 6 |
| 580: | 246 x | 26 x | 293p- | 90 x | 98 3 | 592p9 | 99 - | 299p- |
| 600: | 300p9 | 33 - | 202p9 | 84 x | 138 9 | 51p- | 88p9 | 618p9 |
| 620: | 66 x | 132 x | 18 3 | 48 x | 315p- | 30 6 | 42 9 | 35 - |
| 640: | 32p9 | 107p- | 646p9 | 58 9 | 30 x | 326p9 | 8 2 | 658p9 |
| 660: | 220p9 | 48 x | 308 x | 222 6 | 60 x | 224p9 | 338p9 | 96 x |
| 680: | 113 - | 341p- | 228 6 | 78 x | 230p9 | 6 4 | 80 x | 232 3 |
| 700: | 700p9 | 18 x | 12 x | 708p9 | 13 - | 330 x | 7 - | 359p- |
| 720: | 102 9 | 30 6 | 726p9 | 81 - | 336 x | 61p- | 66 x | 246p9 |
| 740: | 18 6 | 742p9 | 41 - | 318 x | 125p- | 50 3 | 27p- | 22 6 |
| 760: | 380p9 | 108 x | 174 9 | 192p9 | 256 3 | 193p- | 6 x | 90 x |
| 780: | 70 x | 84 x | 393p- | 262 3 | 336 x | 60 x | 199p- | 368 x |
| 800: | 44 7 | 8 x | 268 3 | 202p9 | 810p9 | 5 - | 126 x | 6 2 |
| 820: | 820p9 | 822p9 | 413p- | 276p9 | 69 - | 336 x | 15 - | 419p- |
| 840: | 812 9 | 28 3 | 66 9 | 141 - | 66 x | 213p- | 856p9 | 26p9 |
| 860: | 30 x | 862p9 | 272 6 | 26 x | 66 x | 96 8 | 438p9 | 146 3 |
| 880: | 440p9 | 441p- | 886p9 | 42 9 | 18 x | 414 9 | 66 3 | 420 x |
| 900: | 208 x | 42 x | 151p- | 4 1 | 455p- | 82 x | 390 9 | 459p- |
| 920: | 153 - | 210 x | 34 5 | 464p9 | 126 9 | 155 - | 936p9 | 312 6 |
| 940: | 940p9 | 110 x | 473p- | 24 x | 79 - | 952p9 | 28 x | 24 x |
| 960: | 465 - | 53 - | 322p9 | 144 x | 970p9 | 138 9 | 976p9 | 44 x |
| 980: | 108 2 | 982p9 | 138 3 | 462 x | 495p- | 110 6 | 166p9 | 3 - |

**表 2** レピュニット $R_k = \dfrac{10^k - 1}{9}$ の素因数分解

$k=2$　$11 = 11$
$k=3$　$111 = 3 \cdot 37$
$k=4$　$1111 = 11 \cdot 101$
$k=5$　$11111 = 41 \cdot 271$
$k=6$　$111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$
$k=7$　$1111111 = 239 \cdot 4649$
$k=8$　$11111111 = 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137$
$k=9$　$111111111 = 3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 333667$
$k=10$　$1111111111 = 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091$
$k=11$　$11111111111 = 21649 \cdot 513239$
$k=12$　$111111111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901$
$k=13$　$1111111111111 = 53 \cdot 79 \cdot 265371653$
$k=14$　$11111111111111 = 11 \cdot 239 \cdot 4649 \cdot 909091$
$k=15$　$111111111111111 = 3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 2906161$
$k=16$　$1111111111111111 = 11 \cdot 17 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \cdot 5882353$

**表 3** $10^k + 1$ の素因数分解

$k=1$　$11 = 11$
$k=2$　$101 = 101$
$k=3$　$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$
$k=4$　$10001 = 73 \cdot 137$
$k=5$　$100001 = 11 \cdot 9091$
$k=6$　$1000001 = 101 \cdot 9901$
$k=7$　$10000001 = 11 \cdot 909091$
$k=8$　$100000001 = 17 \cdot 5882353$
$k=9$　$1000000001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 52579$
$k=10$　$10000000001 = 101 \cdot 3541 \cdot 27961$
$k=11$　$100000000001 = 11 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 4093 \cdot 8779$
$k=12$　$1000000000001 = 73 \cdot 137 \cdot 99990001$
$k=13$　$10000000000001 = 11 \cdot 859 \cdot 1058313049$
$k=14$　$100000000000001 = 29 \cdot 101 \cdot 281 \cdot 121499449$
$k=15$　$1000000000000001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 211 \cdot 241 \cdot 2161 \cdot 9091$
$k=16$　$10000000000000001 = 353 \cdot 449 \cdot 641 \cdot 1409 \cdot 69857$