平成25年度 センター試験 (本試　平成25年1月20日実施)

数学I・数学A　(60分, 100点　全問必答)

第1問 (配点 20)

〔1〕 $A = \dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$, $B = \dfrac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ とする。このとき $AB = \dfrac{1}{(1+\sqrt{6})^2 - \boxed{\text{ア}}} = \dfrac{\sqrt{6}-\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，また $\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B} = \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}\sqrt{6}$ である。以上により $A+B = \dfrac{\boxed{\text{カ}}-\sqrt{6}}{\boxed{\text{キ}}}$ となる。

〔2〕 三角形に関する条件 p, q, r を次のように定める。

p : 三つの内角がすべて異なる　　q : 直角三角形でない　　r : $45°$ の内角は一つもない

条件 p の否定を $\bar{p}$ で表し，同様に $\bar{q}, \bar{r}$ はそれぞれ条件 q, r の否定を表すものとする。

(1) 命題「$r \Rightarrow (p$ または $q)$」の対偶は「$\boxed{\text{ク}} \Rightarrow \bar{r}$」である。$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の 0 ～ 3 のうちから一つ選べ。

0 $(p$ かつ $q)$	1 $(\bar{p}$かつ$\bar{q})$
2 $(\bar{p}$または $q)$	3 $(\bar{p}$または$\bar{q})$

(2) 次の 0 ～ 4 のうち，命題「$(p$ または $q) \Rightarrow r$」に対する反例となっている三角形は $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ である。$\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，0 ～ 4 のうちから一つずつ選べ。ただし，$\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ の解答の順序は問わない。

0 直角二等辺三角形	1 内角が $30°$，$45°$，$105°$ の三角形
2 正三角形	3 三辺の長さが 3，4，5 の三角形
4 頂角が $45°$ の二等辺三角形	

(3) r は (p または q) であるための $\boxed{\text{サ}}$。$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，次の 0 ～ 3 のうちから一つ選べ。

0 必要十分条件である	1 必要条件であるが，十分条件ではない
2 十分条件であるが，必要条件ではない	3 必要条件でも十分条件でもない

第2問 (配点 25)

座標平面上にある点Pは，点A$(-8,\ 8)$ から出発して，直線 $y=-x$ 上を x 座標が1秒あたり2増加するように一定の速さで動く。また，同じ座標平面上にある点Qは，点PがAを出発すると同時に原点Oから出発して，直線 $y=10x$ 上を x 座標が1秒あたり1増加するように一定の速さで動く。出発してから t 秒後の2点P，Qを考える。点PがOに到達するのは $t=\boxed{\text{ア}}$ のときである。以下 $0<t<\boxed{\text{ア}}$ で考える。

(1) 点 P と x 座標が等しい x 軸上の点を P′，点 Q と x 座標が等しい x 軸上の点を Q′ とおく。△OPP′ と △OQQ′ の面積の和 S を t で表せば $S = \boxed{イ}\,t^2 - \boxed{ウエ}\,t + \boxed{オカ}$ となる。これより $0 < t < \boxed{ア}$ においては，$t = \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ で S は最小値 $\dfrac{\boxed{ケコサ}}{\boxed{シ}}$ をとる。次に，a を $0 < a < \boxed{ア} - 1$ を満たす定数とする。以下，$a \leqq t \leqq a+1$ における S の最小・最大について考える。

(i)S が $t = \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ で最小となるような a の値の範囲は $\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$ である。

(ii)S が $t = a$ で最大となるような a の値の範囲は $0 < a \leqq \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツテ}}$ である。

(2) 3 点 O，P，Q を通る 2 次関数のグラフが関数 $y = 2x^2$ のグラフを平行移動したものになるのは，$t = \dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ のときであり，x 軸方向に $\dfrac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}$，$y$ 軸方向に $\dfrac{\boxed{ノハヒ}}{\boxed{フ}}$ だけ平行移動すればよい。

第 3 問 (配点 30)

点 O を中心とする半径 3 の円 O と，点 O を通り，点 P を中心とする半径 1 の円 P を考える。円 P の点 O における接線と円 O との交点を A，B とする。また，円 O の周上に，点 B と異なる点 C を，弦 AC が円 P に接するようにとる。弦 AC と円 P の接点を D とする。このとき AP=$\sqrt{\boxed{アイ}}$，OD=$\dfrac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カ}}$ である。さらに，$\cos\angle\mathrm{OAD} = \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ であり，AC=$\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ である。△ABC の面積は $\dfrac{\boxed{シスセ}}{\boxed{ソタ}}$ であり，△ABC の内接円の半径は $\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ である。

(1) 円 O の周上に，点 E を線分 CE が円 O の直径となるようにとる。△ABC の内接円の中心を Q とし，△CEA の内接円の中心を R とする。このとき，QR=$\dfrac{\boxed{テト}}{\boxed{ナ}}$ である。したがって，内接円 Q と内接円 R は $\boxed{ニ}$。$\boxed{ニ}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ 内接する　　① 異なる 2 点で交わる
② 外接する　　③ 共有点を持たない

(2) AQ=$\dfrac{\boxed{ヌ}\sqrt{\boxed{ネノ}}}{\boxed{ハ}}$ であるから, PQ=$\dfrac{\sqrt{\boxed{ヒフ}}}{\boxed{ヘ}}$ となる。したがって, $\boxed{ホ}$。$\boxed{ホ}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ 点 P は内接円 Q の周上にある
① 点 Q は円 P の周上にある
② 点 P は内接円 Q の内部にあり，点 Q は円 P の内部にある
③ 点 P は内接円 Q の内部にあり，点 Q は円 P の外部にある

第 4 問 (配点 25)

(1) 1 から 4 までの数字を，重複を許して並べてできる 4桁(けた)の自然数は，全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 個ある。

(2) (1) の $\boxed{\text{アイウ}}$ 個の自然数のうちで，1 から 4 までの数字を重複なく使ってできるものは $\boxed{\text{エオ}}$ 個ある。

(3) (1) の $\boxed{\text{アイウ}}$ 個の自然数のうちで，1331 のように，異なる二つの数字を 2 回ずつ使ってできるものの個数を，次の考え方に従って求めよう。

(i) 1 から 4 までの数字から異なる二つを選ぶ。この選び方は $\boxed{\text{カ}}$ 通りある。

(ii) (i) で選んだ数字のうち小さい方を，一・十・百・千の位のうち，どの 2 箇所に置くか決める。置く 2 箇所の決め方は $\boxed{\text{キ}}$ 通りある。小さい方の数字を置く場所を決めると，大きい方の数字を置く場所は残りの 2 箇所に決まる。

(iii) (i) と (ii) より，求める個数は $\boxed{\text{クケ}}$ 個である。

(4) (1) の $\boxed{\text{アイウ}}$ 個の自然数を，それぞれ別々のカードに書く。できた $\boxed{\text{アイウ}}$ 枚のカードから 1 枚引き，それに書かれた数の四つの数字に応じて，得点を次のように定める。

- 四つとも同じ数字のとき　9 点
- 2 回現れる数字が二つあるとき　3 点
- 3 回現れる数字が一つと，1 回だけ現れる数字が一つあるとき　2 点
- 2 回現れる数字が一つと，1 回だけ現れる数字が二つあるとき　1 点
- 数字の重複がないとき 0 点

(i) 得点が 9 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サシ}}}$，得点が 3 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

(ii) 得点が 2 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$，得点が 1 点となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}$ である。

(iii) 得点の期待値は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ 点である。

数学II・数学B (60 分, 100 点)

第 1 問 (必答問題) (配点 30)

〔1〕 Oを原点とする座標平面上に 2 点 A(6,0),B(3,3) をとり，線分 AB を 2:1 に内分する点を P，1:2 に外分する点を Q とする。3 点 O,P,Q を通る円を C とする。

(1) P の座標は $\left(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}}\right)$ であり，Q の座標は $\left(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エオ}}\right)$ である。

(2) 円 C の方程式を次のように求めよう。線分 OP の中点を通り，OP に垂直な直線の方程式は $y = \boxed{\text{カキ}}\, x + \boxed{\text{ク}}$ であり，線分 PQ の中点を通り，PQ に垂直な直線の方程式は $y = x - \boxed{\text{ケ}}$ である。これらの 2 直線の交点が円 C の中心であることから，円 C の方程式は $\left(x - \boxed{\text{コ}}\right)^2 + \left(y + \boxed{\text{サ}}\right)^2 = \boxed{\text{シス}}$ であることがわかる。

(3) 円 C と x 軸の二つの交点のうち, 点 O と異なる交点を R とすると, R は線分 OA を $\boxed{\text{セ}}$:1 に外分する。

〔2〕 連立方程式

$$(*)\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2^x+2^y+2^z=\dfrac{35}{2} \\ \dfrac{1}{2^x}+\dfrac{1}{2^y}+\dfrac{1}{2^z}=\dfrac{49}{16} \end{cases}$$

を満たす実数 x,y,z を求めよう。ただし，$x \leqq y \leqq z$ とする。
$X=2^x, Y=2^y, Z=2^z$ とおくと，$x \leqq y \leqq z$ により $X \leqq Y \leqq Z$ である。
$(*)$ から，X,Y,Z の関係式

$$\begin{cases} XYZ = \boxed{\text{ソ}} \\ X+Y+Z=\dfrac{35}{2} \\ XY+YZ+ZX=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \end{cases}$$ が得られる。

この関係式を利用すると，t の 3 次式 $(t-X)(t-Y)(t-Z)$ は $(t-X)(t-Y)(t-Z) = t^3-(X+Y+Z)t^2+(XY+YZ+ZX)t-XYZ = t^3-\dfrac{35}{2}t^2+\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}t-\boxed{\text{ソ}} = \left(t-\dfrac{1}{2}\right)\left(t-\boxed{\text{テ}}\right)\left(t-\boxed{\text{トナ}}\right)$ となる。したがって，$X \leqq Y \leqq Z$ により $X=\dfrac{1}{2}, Y=\boxed{\text{テ}}, Z=\boxed{\text{トナ}}$ となり，$x=\log_{\boxed{\text{ニ}}}X$，$y=\log_{\boxed{\text{ニ}}}Y$，$z=\log_{\boxed{\text{ニ}}}Z$ から $x=\boxed{\text{ヌネ}}$，$y=\boxed{\text{ノ}}$，$z=\boxed{\text{ハ}}$ であることがわかる。

第 2 問 (必答問題) (配点 30)

a を正の実数として，x の関数 $f(x)$ を $f(x)=x^3-3a^2x+a^3$ とする。関数 $y=f(x)$ は，$x=\boxed{\text{アイ}}$ で極大値 $\boxed{\text{ウ}}\,a^{\boxed{\text{エ}}}$ をとり，$x=\boxed{\text{オ}}$ で極小値 $\boxed{\text{カ}}\,a^{\boxed{\text{キ}}}$ をとる。このとき，2 点 $\left(\boxed{\text{アイ}}, \boxed{\text{ウ}}\,a^{\boxed{\text{エ}}}\right)$, $\left(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}\,a^{\boxed{\text{キ}}}\right)$ と原点を通る放物線 $y=\boxed{\text{ク}}\,x^2-\boxed{\text{ケ}}\,a^{\boxed{\text{コ}}}x$ を C とする。原点における C の接線 l の方程式は $y=\boxed{\text{サシ}}\,a^{\boxed{\text{ス}}}x$ である。また，原点を通り l に垂直な直線 m の方程式は $y=\dfrac{1}{\boxed{\text{セ}}\,a^{\boxed{\text{ソ}}}}x$ である。x 軸に関して放物線 C と対称な放物線 $y=-\boxed{\text{ク}}\,x^2+\boxed{\text{ケ}}\,a^{\boxed{\text{コ}}}x$ を D とする。D と l で囲まれた図形の面積 S は $S=\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}a^{\boxed{\text{テ}}}$ である。放物線 C と直線 m の交点の x 座標は，0 と $\dfrac{4a^{\boxed{\text{ト}}}+1}{2a^{\boxed{\text{ナ}}}}$ である。C と m で囲まれた図形の面積を T とする。$S=T$ となるのは $a^{\boxed{\text{テ}}}=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ のときであり，このとき，

$S=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ である。

第 3 問 (選択問題) (配点 20)

(1) 数列 $\{p_n\}$ は次を満たすとする。$p_1=3, p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+1(n=1,2,3,\cdots)\cdots$① 数列 $\{p_n\}$ の一般項と，初項から第 n 項までの和を求めよう。まず，①から $p_{n+1}-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}=\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\right)(n=1,2,3,\cdots)$ となるので，数列 $\{p_n\}$ の一般項は $p_n=\dfrac{1}{\boxed{ウ}\cdot\boxed{エ}^{n-2}}+\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ である。

したがって，自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}p_k=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\left(1-\dfrac{1}{\boxed{ケ}^{n}}\right)+\dfrac{\boxed{コ}n}{\boxed{サ}}$ である。

(2) 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ は，初項から第 3 項が $a_1=3$，$a_2=3$，$a_3=3$ であり，すべての自然数 n に対して $a_{n+3}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+2}}\cdots$② を満たすとする。また，数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を，自然数 n に対して，$b_n=a_{2n-1}$，$c_n=a_{2n}$ で定める。数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求めよう。まず，②から $a_4=\dfrac{a_1+a_2}{a_3}=\boxed{シ}$，$a_5=3$，$a_6=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$，$a_7=3$ である。したがって，$b_1=b_2=b_3=b_4=3$ となるので $b_n=3\ (n=1,2,3,\cdots)\cdots$③ と推定できる。③を示すためには，$b_1=3$ から，すべての自然数 n に対して $b_{n+1}=b_n\cdots$④ であることを示せばよい。このことを「まず，$n=1$ のとき④が成り立つことを示し，次に，$n=k$ のとき④が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも④が成り立つことを示す方法」を用いて証明しよう。この方法を $\boxed{ソ}$ という。$\boxed{ソ}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ 組立除法　① 弧度法　② 数学的帰納法　③ 背理法

〔I〕$n=1$ のとき，$b_1=3$，$b_2=3$ であることから④は成り立つ。

〔II〕$n=k$ のとき，④が成り立つ，すなわち $b_{k+1}=b_k\cdots$⑤ と仮定する。$n=k+1$ のとき，②の n に $2k$ を代入して得られる等式と，$2k-1$ を代入して得られる等式から $b_{k+2}=\dfrac{c_k+\boxed{タ}_{k+1}}{\boxed{チ}_{k+1}}$，$c_{k+1}=\dfrac{\boxed{ツ}_k+c_k}{\boxed{テ}_{k+1}}$ となるので，b_{k+2} は $b_{k+2}=\dfrac{\left(\boxed{ト}_k+\boxed{ナ}_{k+1}\right)\boxed{ニ}_{k+1}}{b_k+c_k}$ と表される。したがって，⑤により，$b_{k+2}=b_{k+1}$ が成り立つので，④は $n=k+1$ のときにも成り立つ。〔I〕，〔II〕により，すべての自然数 n に対して④の成り立つことが証明された。したがって，③が成り立つので，数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=3$ である。次に，②の n を $2n-1$ に置き換えて得られる等式と③から $c_{n+1}=\dfrac{1}{3}c_n+1\ (n=1,2,3,\cdots)$ となり，$c_1=\boxed{ヌ}$ であることと①から，数列 $\{c_n\}$ の一般項は，(1) で求めた数列 $\{p_n\}$ の一般項と等しくなることがわかる。

第 4 問 (選択問題) (配点 20)

OA=5，OC=4，$\angle$AOC$=\theta$ である平行四辺形 OABC において，線分 OA を 3:2 に内分する点を D とする。また，点 A を通り直線 BD に垂直な直線と直線 OC の交点を E とする。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{c}$ と表す。

(1) t を $\cos\theta$ を用いて表そう。$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\vec{c}-\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\vec{c}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{ウエ}\cos\theta$ となるので，

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\boxed{オ}$ により $t=\dfrac{\boxed{カ}\left(\boxed{キ}\cos\theta+1\right)}{\boxed{ク}\left(\cos\theta+\boxed{ケ}\right)}\cdots$① となる。

(2) 点 E は線分 OC 上にあるとする。θ のとり得る値の範囲を求めよう。ただし，線分 OC は両端の点 O, C を含むものとする。以下，$r = \cos\theta$ とおく。点 E が線分 OC 上にあることから，$0 \leqq t \leqq 1$ である。$-1 < r < 1$ なので，①の右辺の $\cos\theta$ を r に置き換えた分母 $\boxed{\text{ク}}\left(r + \boxed{\text{ケ}}\right)$ は正である。したがって，条件 $0 \leqq t \leqq 1$ は $0 \leqq \boxed{\text{カ}}\left(\boxed{\text{キ}}\,r+1\right) \leqq \boxed{\text{ク}}\left(r+\boxed{\text{ケ}}\right) \cdots$② となる。$r$ についての不等式②を解くことにより，θ のとり得る値の範囲は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{コ}}} \leqq \theta \leqq \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi$ であることがわかる。

(3) $\cos\theta = -\dfrac{1}{8}$ とする。直線 AE と直線 BD の交点を F とし，三角形 BEF の面積を求めよう。① により，$t = \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ となり $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\vec{a} + \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\vec{c}$ となる。したがって，点 F は線分 AE を $1 : \boxed{\text{テ}}$ に内分する。このことと，平行四辺形 OABC の面積は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ であることから，三角形 BEF の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ネ}}\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

第 5 問 (選択問題) (配点 20)

次の表は，あるクラスの生徒 10 人に対して行われた国語と英語の小テスト（各 10 点満点）の得点をまとめたものである。ただし，小テストの得点は整数値をとり，C > D である。また，表の数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていない。

番 号	国 語	英 語
生徒 1	9	9
生徒 2	10	9
生徒 3	4	8
生徒 4	7	6
生徒 5	10	8
生徒 6	5	C
生徒 7	5	8
生徒 8	7	9
生徒 9	6	D
生徒 10	7	7
平均値	A	8.0
分 散	B	1.00

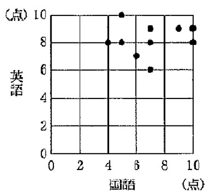
以下，小数の形で解答する場合，指定された桁(けた)数の一つ下の桁を四捨五入し，解答せよ。途中で割り切れた場合，指定された桁まで⓪にマークすること。

(1) 10 人の国語の得点の平均値 A は $\boxed{\text{ア}}.\boxed{\text{イ}}$ 点である。また，国語の得点の分散 B の値は $\boxed{\text{ウ}}.\boxed{\text{エオ}}$ である。さらに，国語の得点の中央値は $\boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キ}}$ 点である。

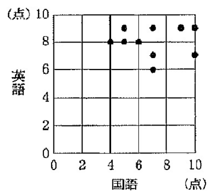
(2) 10 人の英語の得点の平均値が 8.0 点, 分散が 1.00 であることから, C と D の間には関係式 C+D= $\boxed{\text{クケ}}$, $(\mathrm{C}-8)^2 + (\mathrm{D}-8)^2 = \boxed{\text{コ}}$ が成り立つ。上の連立方程式と条件 C > D により，C，D の値は, それぞれ $\boxed{\text{サ}}$ 点，$\boxed{\text{シ}}$ 点であることがわかる。

(3) 10 人の国語と英語の得点の相関図（散布図）として適切なものは $\boxed{\text{ス}}$ であり，国語と英語の得点の相関係数の値は $\boxed{\text{セ}}$. $\boxed{\text{ソタチ}}$ である。ただし， $\boxed{\text{ス}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

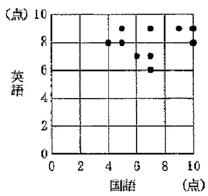
⓪



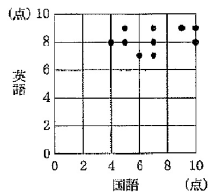
①



②



③



(4) 同じ 10 人に対して数学の小テスト（10 点満点）を行ったところ，数学の得点の平均値はちょうど 5.4 点であり，分散はちょうど 1.44 であった。また，国語と数学の得点の相関係数はちょうど -0.125 であった。ここで，k を 1 から 10 までの自然数として，生徒 k の国語の得点を x_k，数学の得点を y_k，国語と数学の得点の合計 $x_k + y_k$ を w_k で表す。このとき，国語と数学の得点の合計 w_1，w_2，$\cdots$，w_{10} の平均値は $\boxed{\text{ツテ}}$. $\boxed{\text{ト}}$ 点である。次に，国語と数学の得点の合計 w_1，w_2，$\cdots$，w_{10} の分散を以下の手順で求めよう。国語の得点の平均値を $\bar{x}$，分散を ${s_x}^2$，数学の得点の平均値を $\bar{y}$，分散を ${s_y}^2$，国語と数学の得点の合計の平均値を $\bar{w}$，分散を ${s_w}^2$ で表す。このとき $T = (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_{10} - \bar{x})(y_{10} - \bar{y})$ とおくと，国語と数学の得点の相関係数は -0.125 であるから $T=$ $\boxed{\text{ナニ}}$. $\boxed{\text{ヌネノ}}$ である。また，k を 1 から 10 までの自然数として，$(w_k - \bar{w})^2$ は $(w_k - \bar{w})^2 = \{(x_k + y_k) - (\bar{x} + \bar{y})\}^2 = \{(x_k - \bar{x}) + (y_k - \bar{y})\}^2$ と変形できる。これを利用して，分散 ${s_w}^2$ は ${s_w}^2 = \dfrac{(w_1 - \bar{w})^2 + (w_2 - \bar{w})^2 + \cdots + (w_{10} - \bar{w})^2}{10} = {s_x}^2 + {s_y}^2 + \boxed{\text{ハ}}\ T$ と表すことができるので，分散 ${s_w}^2$ の値は $\boxed{\text{ヒ}}$. $\boxed{\text{フヘ}}$ である。ただし， $\boxed{\text{ハ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{1}{2}$　　① $\dfrac{1}{5}$　　② $\dfrac{1}{10}$　　③ $\dfrac{1}{20}$

第 6 問 (選択問題) (配点 20)

自然数 N を，0 または 1 または 2 のいずれかの値をとる a_0，$a_1 \cdots$，a_{p-1} を用いて $N = a_{p-1} \times 3^{p-1} + a_{p-2} \times 3^{p-2} + \cdots + a_2 \times 3^2 + a_1 \times 3 + a_0 \cdots$ ① と表すとき，数字の列 $a_{p-1}a_{p-2}\cdots a_2a_1a_0$ を N の 3 進数表示とよび，p をこの 3 進数表示の桁（けた）数とよぶ。ただし，a_{p-1} は 0 ではないとする。たとえば $35 = 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3 + 2$ であるから，35 の 3 進数表示は 1022 であり，その桁数は 4 である。また，自然数 1 から 10 の 3 進数表示は以下のようになる。

自然数 N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N の 3 進数表示	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101

3 進数表示が p 桁の自然数 N は $3^{p-1} \leqq N < 3^p$ を満たすので，常用対数をとることにより，p と N の関係式 $p-1 \leqq \dfrac{\log_{10} N}{\log_{10} 3} < p \cdots$ ② が成り立つことがわかる。

(1) 3 進数表示が 1212 である自然数は $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2) 自然数 N を与え，その 3 進数表示を求めよう。①の N を 3^{p-1} で割った商が a_{p-1} であることに着目して，N の 3 進数表示 $a_{p-1}a_{p-2}\cdots a_2a_1a_0$ を**上の位の数から順に**出力する〔プログラム 1〕を作成した。また，①の N を 3 で割った余りが a_0 であることに着目して，N の 3 進数表示 $a_{p-1}a_{p-2}\cdots a_2a_1a_0$ を**下の位の数から順に**出力する〔プログラム 2〕を作成した。ただし，INT(X) は X を超えない最大の整数を表す関数である。また，LOG10(X) は X の常用対数を表す関数であり，②により，いずれのプログラムにおいても，110 行は入力された自然数 N または M の 3 進数表示の桁数を P に代入している。

〔プログラム 1〕
```
100   INPUT N
110   LET P=INT(LOG10(N)/LOG10(3))+1
120   LET X=3^(P-1)
130   FOR I=1 TO P
140       PRINT  [ ウ ]
150       LET   N=[ エ ]
160       LET   X=[ オ ]
170   NEXT I
180   END
```

〔プログラム 2〕
```
100   INPUT M
110   LET P=INT(LOG10(M)/LOG10(3))+1
120   FOR I=1 TO P
130       PRINT M-INT(M/3)*3
140       LET   M=INT(M/3)
150   NEXT I
160   END
```

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の⓪ ～ ⑧ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ X/3	① N/3	② X/N
③ INT(N/3)	④ N-INT(N/3)	⑤ N-INT(N/3)*3
⑥ INT(N/X)	⑦ N-INT(N/X)	⑧ N-INT(N/X)*X

〔プログラム 2〕を実行して変数 M に 77 を入力すると，$\dfrac{\log_{10} 77}{\log_{10} 3} = 3.95\cdots$ であることから，110 行では P に 4 が代入される。130 行で出力される値を並べることにより，自然数 77 の 3 進数表示は $\boxed{\text{カキクケ}}$ となる。

(3) 与えられた自然数 N の 3 進数表示 $a_{p-1}a_{p-2}\cdots a_2a_1a_0$ が，これを逆に並べた数字の列 $a_0a_1a_2\cdots a_{p-2}a_{p-1}$ と一致するかどうかを調べ，その結果を出力する〔プログラム 3〕を作成した。たとえば，〔プログラム 3〕を実行して変数 N に 202 を入力すると，202 は 3 進数表示が 21111 であるから「一致しない」と出力される。また変数 N に 203 を入力すると，203 は 3 進数表示が 21112 であるから「一致する」と出力される。

〔プログラム 3〕
```
100   INPUT N
```

```
110   LET P=INT(LOG10(N)/LOG10(3))+1
120   LET X=3^(P-1)
130   [ コ ]
140   FOR I=1 TO INT(P/2)
150       LET  A=[ ウ ]
160       LET  N=[ エ ]
170       LET  X=[ オ ]
180       LET B=M-INT(M/3)*3
190       LET M=INT(M/3)
200       [ サ ]
210   NEXT I
220   PRINT "一致する"
230   GOTO 250
240   PRINT "一致しない"
250   END
```

〔プログラム 3〕の $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑤ のうちから一つ選べ。

⓪ LET M=N	① LET M=P	② LET M=X
③ LET N=M	④ LET N=P	⑤ LET N=X

$\boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ IF A=B THEN GOTO 220	① IF A<>B THEN GOTO 220
② IF A=B THEN GOTO 240	③ IF A<>B THEN GOTO 240

〔プログラム 3〕を実行して変数 N に 436 を入力すると，$\dfrac{\log_{10} 436}{\log_{10} 3} = 5.53\cdots$ であることから，110 行では P に 6 が代入され，200 行の IF 文の判定は $\boxed{\text{シ}}$ 回実行される。200 行の IF 文の判定が最後に行われたときの X の値は $\boxed{\text{スセ}}$ であり，その後，$\boxed{\text{ソ}}$ 。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ 220 行が実行され，240 行は実行されない

① 240 行が実行され，220 行は実行されない

② 220 行と 240 行の両方が実行される

③ 220 行と 240 行はいずれも実行されない