約分と互除法

柏陵高等学校 氏家 悟

1 はじめに

今年度も，中学生対象学校説明会の模擬授業でユークリッドの互除法を用いた約分を扱った。2005 年の「$\alpha-\omega$」 に，初めて扱った時の記事を掲載していただいたが，その後，何度かこの教材を扱っているうちに，いろいろ見えてきたことがあったり，問題も順序を踏むように精選されてきたので，再掲させていただいた。

2 模擬授業

前回，掲載したときの模擬授業は 50 分であったが，最近は 30 分で行なっているため，当時とはやり方を変えている。

当時の流れは，はじめに素因数分解などで約分してもらい，素因数の数が多くなったり，素因数が大きな素数になったりして，苦しくなったところで，ユークリッドの互除法を伝授していた。今年は，はじめからユークリッドの互除法を意識した変形をやってもらった。

(1) 引いた数で約分

2004 年の確率の授業で，生徒が分数が既約かどうか悩んでいた。自分は「引けばわかる」と言ってしまったが，もちろん，生徒は意味がわからない。それを教材にしたのが，そもそもの始まりである。

そこで，今回のプリントでも，まずは，1 回引いた数で割れる分数から始めた。実際のプリントでは，ひと目で分かるような分数から掲載したが，授業では 3 桁以上同士のものを扱った。

大きな数を扱うので，電卓の配布は必須である。(100 円ショップなら 41 個買っても，4305 円)

例 1

1. $\dfrac{112}{126}$　2. $\dfrac{144}{162}$　3. $\dfrac{756}{693}$　4. $\dfrac{1008}{1512}$　5. $\dfrac{13608}{18144}$

4 は順に割っていく方法（素因数分解）では，

$$\frac{1008}{1512}=\frac{504}{756}=\frac{252}{378}=\frac{126}{189}=\frac{42}{63}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$$

となるところだろうが，互除法ならば，

$$1512-1008=504,\ 1008=504\times 2 \text{ より，} \frac{1008}{1512} \text{ は } 504 \text{ で割れて，} \frac{2}{3}$$

(2) 割った余りで約分

次の段階に進むために，例 1 では，引いた数で割れる分数だけだったが，割り切れなければ，「割った余りでさらに約分」となる例題を扱う。

例 2

1. $\dfrac{84}{147}$　2. $\dfrac{60}{108}$　3. $\dfrac{90}{162}$　4. $\dfrac{540}{972}$　5. $\dfrac{7020}{12636}$

5 は $12636-7020=5616$，$7020-5616=1404$，$5616=1404\times 4$ より，$\dfrac{7020}{12636}$ は 1404 で割れて，$\dfrac{5}{9}$

割る数を見つけるための素因数分解は，素因数に 13 が含まれるため，結構面倒となる。

さらに,「引く」という操作は，割り算で，商が 1 の時の操作であるから，普通は，割り算の余りで数字を小さくすることと同じである。

つまり，$1512-1008=504$ は,

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 1008 & 1512 \\ & 1008 \\ \hline & 504 \end{array}$$

における引き算の部分を取り出したものだから，本来，$1512-1008\times 1=504$ と記すべきものである。

したがって，引いてもまだ小さくならなければ，何度も引くことになる。もともと，掛け算が「足し算の繰り返し」，割り算は「引き算の繰り返し」だったのだから，引き算を繰り返して，引く数より小さくすることは,「割り算の余り」を求めることに他ならない。

次の例は，数回の割り算が必要になるものである。

例 3

1. $\dfrac{108}{228}$　2. $\dfrac{132}{414}$　3. $\dfrac{216}{264}$　4. $\dfrac{2717}{5681}$　5. $\dfrac{819}{1449}$

2 は $414=132\times 3+18$，$132=18\times 7+6$，$18=6\times 3$，より，$\dfrac{132}{414}$ は 6 で割れて，$\dfrac{22}{69}$

あとは,「時間のある限り，やってみよう」

例 4

1. $\dfrac{4199}{5083}$　2. $\dfrac{17051}{11033}$　3. $\dfrac{19411}{47141}$　4. $\dfrac{115197}{107113}$　5. $\dfrac{62615533}{62773913}$

5 の数の素因数は

$62615533=7907\times 7919$，$62773913=7927\times 7919$

である。実は，7907，7919，7927 は 999，1000，1001 番目の素数であるから，これを電卓の素因数分解で突き止めるのは，ほぼ絶望的である。

ところが，互除法では次の通り。

> $62773913 = 62615533 \times 1 + 158380$，$62615533 = 158380 \times 395 + 55433$，$158380 = 55433 \times 2 + 47514$，$55433 = 47514 \times 1 + 7919$，$47514 = 7919 \times 6 + 0$ より，$\dfrac{62615533}{62773913}$ は 7919 で割れて，$\dfrac{7907}{7927}$

(3)　既約であることの確認

小さい数同士なら互いに素であることはひと目で分かる。ところが大きな数では，自信が持てない。それこそ，$\dfrac{7907}{7927}$ を素数で作ったことを知っていればあきらかだが，普通は既約かどうかは，ひと目で分かるものではない。

確率の授業でも，生徒が悩むのはそこであった。

これも互除法により，GCM が 1 であれば既約と言える。

> $7927 = 7907 \times 1 + 20$，$7907 = 20 \times 395 + 7$，$20 = 7 \times 2 + 6$，$7 = 6 \times 1 + 1$，より，$\dfrac{7907}{7927}$ は 1 でしか割れない。

高校の教科書出てくるくらいの分数なら，慣れれば数回の割り算（引き算）で既約かどうかがわかる。「引けば分かる」のである。

(4)　約分のリテラシー

模擬授業では，多くの中学生が感動してくれるので,「弟や妹，おうちの人にも教えよう。」と結ぶと，皆そうすると言ってくれる。保護者が一緒の時は，保護者にも電卓とプリントを配布して，一緒にやってもらう。

大人も結構，喜んでくれるし，先日の模擬授業の時に，他教科の先生にもプリントと電卓を渡して教えたら,「すごい，すごい」と喜んでくれた。

約分ができて何が嬉しいのかと問われたら，返す言葉はないが，こうした素朴な感動が数学や整数論への入口になるのだろうと思う。

こうした記事を，数学の先生向けに書くのは，釈迦に説法で恥ずかしいが，この程度のことでも，世間では常識でないのである。

ユークリッドの互除法とか，最大公約数などという語を出さなくて良いから，小学生にもやらせてみたいものだ。約分が題材なら，小学生でも楽しめると思う。