

三角比の表から角度を求める場合の注意点

県立柏高等学校 西川 誠

数学 I 「三角比」の所で、表を見る練習として、 $\sin A$ の値から角度 A を求める問題をやりますが、「表の中で数値に近い方が、角度も近いとは限らないのではないか？」ということが、県立柏高校の数学科で、2012 年 1 月の終わりごろ話題になりました。私も危険だなっという認識はもっていましたが、具体的に数値を調べてみたことはありませんでした。今回詳しく調べてみると、特に \tan の場合には、こんなにもずれがあるだということをあらためて認識させられた次第です。有名な事実としてご存じの先生方も多いこととは思いますが、実際どういう数値のときにだめなのかは、あまり知られていないようです。ここに数値実験の結果等を報告しておきますので、授業で扱う場合の参考にしていただけたらと思います。

1 まず実際に問題を解いてみましょう。

右の表を利用して、次の問題①～⑤を解いて見てください。

問題① $\sin A = 0.8788$	角度	sin	cos	tan
問題② $\sin B = 0.8703$	59°	0.8572	0.5150	1.6643
問題③ $\cos C = 0.4924$	60°	0.8660	0.5000	1.7321
問題④ $\tan D = 1.6982$	61°	0.8746	0.4848	1.8040
問題⑤ $\tan E = 1.7675$	62°	0.8829	0.4695	1.8807

すべてちょうど中間に近い値なのでどちらがいいか微妙な問題です。

2 問題①の解説

62° のとき $0.8829 - 0.8788 = 0.0041$ で 61° のとき $0.8788 - 0.8746 = 0.0042$ なので、 62° の方に近いから A は約 62° となりそうですが、逆三角関数を使って詳しく計算すると $A = 61.49794\dots$ となるので、 A は約 61° とした方がいいのではないかとこの訳です。sin と cos でこういった逆転の例は、 $0^\circ \sim 90^\circ$ の範囲で 6 つありました。

(sin と cos は、同じ数値でこういったことが起こります。)

	0.7604	0.7716	0.7826	0.8788	0.8870	0.9799
sin の角度	49°	50°	51°	61°	62°	78°
cos の角度	41°	40°	39°	29°	28°	12°

まあ例が6つしかなくピンポイントでしか出現しないので、 \sin と \cos の場合は、小数第4位の付近で判定することがなければ大丈夫と言えますね。

3 問題② ③ ④ の解説 (ちょうど等距離の場合です。)

(② の解説)

$0.8746 - 0.8703 = 0.0043$ で $0.8703 - 0.8660 = 0.0043$ なので、ちょうど中間になっています。この場合は、どちらでもいいかというところ... 一応逆三角関数を使って求めると、 $B = 60.493520\dots^\circ$ となるので、 B は約 60° とした方がよさそうです。一般的に \sin の場合中間の値なら小さい方を採用した方が近くなります。

これは、 \sin のグラフが上に凸な増加関数だからだと思います。

ただし例外があって、 $0.0262(2^\circ)$ 、 $0.0785(5^\circ)$ 、 $0.4462(27^\circ)$ の3つだけは、大きい方が近くなります。

これは、 $\sin 1^\circ = 0.0174524\dots$ とか $\sin 2^\circ = 0.03489949\dots$ のように少し詳しく計算させるとこの2つの中間の値は、 $0.0261759\dots$ となり $\sin 1.5^\circ = 0.0261769\dots$ より小さいのが正しい値なのに、誤差のイタズラで、 $\sin 1^\circ = 0.0175$ と $\sin 2^\circ = 0.0349$ を使用すると中間の値が、 0.0262 となってしまう、 $\sin 1.5^\circ = 0.0261769\dots$ より大きい値となってしまうのが原因です。普通上に凸なグラフなので直線の中点の方が下に来るべきなのです。

(③ と④ の解説)

この2問も中間になっている場合ですが、一般的に \cos と \tan の場合は、中間の値なら大きい方を採用した方が近くなります。これは、 \cos は、上に凸な減少関数で、 \tan は、下に凸な増加関数でだからだと思います。 $\cos C = 0.4924$ なら、角 C は 60° と 61° の中間なので C は約 61° となります。 $\tan D = 1.6982$ なら角 D は 59° と 60° の中間なので D は約 60° となります。

ちょうど等距離の場合のまとめ

\sin の場合は、小さい方を採用	\cos と \tan の場合は、大きい方を採用			
(例外) \sin と \cos の例外	0.0262	0.0785	0.4462	
() の中は、 \cos の角度	$2^\circ(88^\circ)$	$5^\circ(85^\circ)$	$27^\circ(63^\circ)$	
\tan の例外	0.0787	0.2586	0.2773	0.2962
	4°	14°	15°	16°

4 問題⑤ の解説 (\tan の場合です。)

問題⑤ $\tan E = 1.7675$ の場合は、 61° と 60° の間となり、 $1.8040 - 1.7675 = 0.0365$ で $1.7675 - 1.7321 = 0.0354$ となるので、随分 60° の方に近いのですが、逆三角関数を使って求めると、 $E = 60.5000831\dots$ となるので、 E は約 61° とした方がより近い角度となります。

\tan は、 44° 以下の場合はピンポイントで出現するだけですが、 45° 以上になるとすごく危険です。 \sin と \cos の場合には、全範囲でもピンポイントだけの出現なのに、 \tan の場合は、ある

範囲にあるものがすべてだめとなります。例えば $85^\circ \sim 89^\circ$ の場合を書いておきます。

角度	tan	中点の値	角度の真ん中での tan の値	
85°	11.4301		85.5°	12.70620474
86°	14.3007	12.86540	86.5°	16.34985548
87°	19.0811	16.69090	87.5°	22.90376555
88°	28.6363	23.85870	88.5°	38.18845930
89°	57.2900	42.96315		

左と右の表のいずれの範囲にある場合が、逆転する場合があります。例えば $12.86540 \sim 12.70620474$ の範囲にある数値の場合、 $\tan 85^\circ$ の値に近いけれども、角度は 86° を採用すべきだということです。 $\tan F = 12.7999$ でやってみると $F = 85.532806 \dots$ となり F は約 86° ということです。

$42.96315 \sim 38.18845930$ などは随分幅がありますが、この範囲は、すべて 89° を採用した方がいいとなります。

$\tan G = 38.2111$ でやってみると 89° のとき $57.2900 - 38.2111 = 19.0789$ 、
 88° のとき $38.2111 - 28.6363 = 9.5748$ で、 $\tan 88^\circ$ の方に随分近いのですが、
 $G = 88.5008883 \dots$ となり G は約 89° のようになります。

\tan のグラフは、 90° 付近で漸近線に近づいていくので、私などの感覚では直線と見なしやすくなるのでは、と思ったりもしますが、 x 軸の方向に 1° ずつのきざみ幅でとっているところに無理があるのですね。

5 最後に...

こういった計算をエクセルでやらせているときに、ある先生から $\sin 59^\circ$ の値を小数第 9 位まで手計算で求めた人の話を聞きました。面白そうなのでちょっとやってみると... 小数第 4 位ぐらいまでならすごく簡単にできましたので、これも紹介しておきます。

使うのは $\sqrt{3} \doteq 1.73205$ 、 $\pi \doteq 3.14159$ 、 $\sin x \doteq x$ 、 $\cos x \doteq 1 - (x^2/2)$ と \sin の加法定理、そして、手計算の代わりに普通の電卓だけです。

まず $\sin 1^\circ = \sin(\pi/180) \doteq \pi/180 \doteq 0.017453$ ← 適当な所で打ち切っています。

$$\cos 1^\circ = \cos(\pi/180) \doteq 1 - \pi^2/64800 \doteq 0.999848 \text{ と求めて}$$

$$\text{次に } \sin 59^\circ = \sin(60^\circ - 1^\circ) = \sin 60^\circ \cos 1^\circ - \cos 60^\circ \sin 1^\circ$$

$$\doteq (1.73205/2) \times (0.999848) - 0.5 \times (0.017453)$$

$$= 0.865893364 - 0.0087265$$

$$= 0.857166864 \doteq 0.8572 \text{ と小数第 4 位まで求まりました。}$$

(ちゃんと三角比の表の値と一致しています。)

角度が $1^\circ = \pi/180$ の場合 $\sin x \doteq x$ で充分なので、すごく簡単に求まってしまうのですね。(もちろん弧度法じゃないと無理ですが...)

ついでに、コンピュータの前にコンピュータがいたという笑い話になりそうなお話ですが... コンピュータが出現する以前に、計算を専門にやる人達(職業です。)がいたのをご存じですか？

高校時代に読んだ「大学への数学」という雑誌の中で淡中先生が機械の computer に対して計算する人ということで、computer と綴るのだが… ということで、かつて複雑な計算を手でやる職業があったことが紹介されていました。また、森本清吾先生の本を読んでいたときにも、日本で第二次世界大戦の時に砲弾の弾道計算などのために、多くの人を使って人力で計算処理していたことなどが書かれていました。