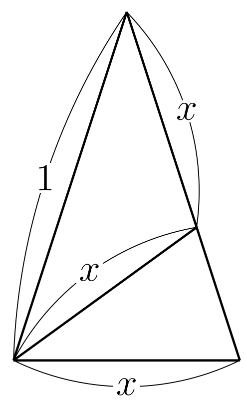
正多角形を幾何的に考える

若松高等学校
木村 謙二

1　はじめに

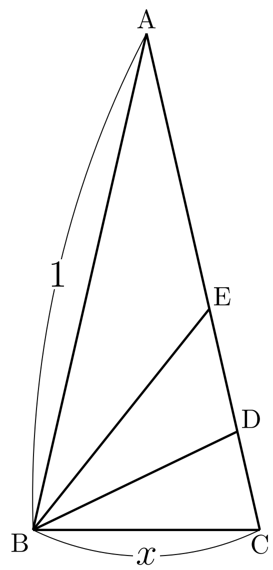


正十角形 (正五角形) の一辺を求める方法として，正十角形を十等分した二等辺三角形で，右図のような補助線を引き三角形の相似を使う方法は有名である。

$\bigl(1 : x = x : (1-x)$ より $x^2 = 1-x\bigr)$

正五角形は定規とコンパスのみによる作図が可能，次は正十七角形だ。それではこの方法を正十七角形にも使えないかと考えた。しかしこれはあまりに厳しかった。角の八等分線になってしまい複雑すぎる。そこで，一般に作図は不可能であるのだが正九角形はどうかと考えた。これもなかなかおもしろそうだが，もう少し簡単にして正七角形ならできそうだということで，正五角形を正十角形で考えたのと同様に，倍の正十四角形で考えてみることにする。

2　方程式をつくる



正十四角形を構成する 1 つの二等辺三角形を右に示した。$A = \dfrac{1}{7}\pi$，$B = C = \dfrac{3}{7}\pi$ である。ここで B の三等分線をひき，AC との交点を D, E とする。AB を 1，BC を x と置き，x を求めることを目標とする。

ここでおもしろいことに二等辺三角形がたくさんできている。$\triangle$ABC は勿論，その相似形の $\triangle$BCD，更に $\triangle$CBE も二等辺三角形である。

この二等辺三角形からわかることで，

$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} = x$

$\mathrm{EC} = \mathrm{BC} = x$

$\mathrm{BE} = \mathrm{AE} = 1 - x$ がいえる。

また，$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{BCD}$ より　$1 : x = x : \mathrm{CD}$
よって　$\mathrm{CD} = x^2$
$\mathrm{DE} = 1 - (\mathrm{AE} + \mathrm{CD}) = x - x^2$
これにより，すべてのパーツが x で表現できることとなった。

ここまでくればあと条件 1 つで x が求められる。と，ここで暫く止まってしまった。B の三等分のうちどちらかの二等分から比をつくれば，例えば，

$$\mathrm{BE} : \mathrm{BC} = \mathrm{ED} : \mathrm{DC} \quad \text{即ち} \quad (1-x) : x = (x - x^2) : x^2$$

と考えたが，何も進展していない。もう 1 つも同様であった。

そんな中見つけたのが $\triangle\mathrm{ABD} \backsim \triangle\mathrm{BED}$ であった。$\mathrm{AD} = 1 - x + x - x^2 = 1 - x^2$ から三辺の比を記せば

$$1 : x : (1 - x^2) = (1 - x) : (x - x^2) : x$$

前の 2 つが $1-x$ 倍になっているところで，最後の比で条件をつくられる。$(1-x^2)(1-x) = x$ であることから，

$$\boldsymbol{x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0}$$

である。ちなみに，この方程式は 3 つの実数解をもつ。

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ とすれば，

$$f(-2) = -7, f(0) = 1, f(1) = -1, f(2) = 1$$

中間値の定理からこの間に解が存在することが容易に言える。関数電卓で近似値を求めると，$-1.247, 0.445, 1.802$ となる。有効な解は $0 < x < 1$ にあるものなので，0.445 がそれに相当する。

この方程式は当然平易な厳密解をもたない。カルダノの方式で解を求めてみたが，虚数が消えない形 (不還元の形) となってしまうのでここでは省略する。

3　代数的解法との関係

複素平面を利用して正七角形を作図，すなわち 1 の 7 乗根を考えることによって正七角形を考える方法があるので，参考のために記しておこう (また三角関数を利用する方法もある)。$z^7 = 1$ より $z^7 - 1$ の因数分解を考えればよい。

$$z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

この右側の式はこれ以上分解できないが対称式であることを利用して

$$\begin{aligned} & z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \\ = \; & z^3 \left(z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \right) \\ = \; & z^3 \left\{ \left(z + \frac{1}{z} \right)^3 + \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 - 2 \left(z + \frac{1}{z} \right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

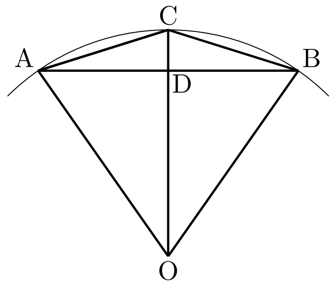
$z + \dfrac{1}{z} = x$ とすれば，

$$\boldsymbol{x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0}$$

この式は前述の正十四角形の式と酷似していることは明らかであろう。

ちなみに，正 n 角形の一辺と正 $2n$ 角形の一辺との間には次のような関係がある。

正 n 角形，正 $2n$ 角形が円 O に内接しているものとする。正 n 角形の一辺を a，正 $2n$ 角形の一辺を b とし，半径を 1，$\mathrm{CD} = k$ とする。



△BCD と △BDO に三平方の定理を使い，

$$k^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 \quad ①$$

$$(1-k)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 1 \quad ②$$

① − ② より，$2k = b^2$。これを ① に代入し 4 倍して

$$b^4 + a^2 = 4b^2$$

$$a^2 = -b^4 + 4b^2$$

よって $a = \sqrt{-b^4 + 4b^2}$ また，② より，$k = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

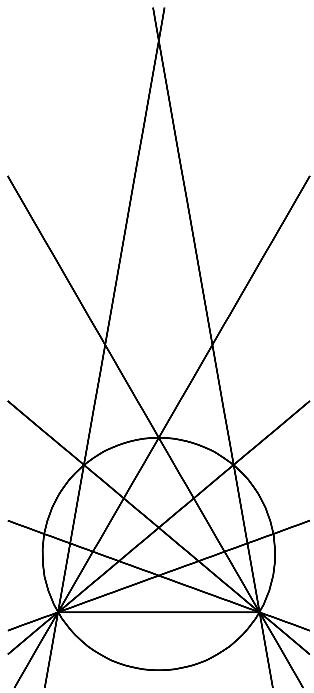
① に代入して $\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2$

$$2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = b^2$$

よって，$b = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$

4　今後への発展

最初に話した通り目標は正十七角形だが，まず正九角形を分析したい。これもなかなか面白い性質がありそうなので，何処かに糸口がある筈だと考えている。ただあくまでシンプルに幾何的にこだわって考えていきたい。



参考文献

[1] ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
$\Delta' - \mathrm{E}' - \Sigma\mathrm{T}'\Gamma\Upsilon\mathrm{MNA}\Sigma\mathrm{IO}\Upsilon$
(ΘΕΤΙΚΗΣ　ΚΑΥΕΥΘΥΝΖΕΩΣ)
ΤΟΜΟΣ　ΔΕΥΤΕΡΟΣ　ΙΩΑΝ, ΠΑΝΑΚΗ
アテネ大学 1972 年の教科書と思われる (古書のため子細不明)