

平成24年度 センター試験 (本試 平成24年1月15日実施)

数学I・数学A (60分, 100点 全問必答)

第1問 (配点20)

〔1〕 (1) 不等式 $|2x+1| \leq 3$ の解は $\boxed{\text{アイ}} \leq x \leq \boxed{\text{ウ}}$ である。以下, a を自然数とする。

(2) 不等式 $|2x+1| \leq a \dots \textcircled{1}$ の解は $\frac{-\boxed{\text{エ}}-a}{\boxed{\text{オ}}} \leq x \leq \frac{-\boxed{\text{エ}}+a}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(3) 不等式 $\textcircled{1}$ を満たす整数 x の個数を N とする。 $a=3$ のとき, $N=\boxed{\text{カ}}$ である。また, a が $4, 5, 6, \dots$ と増加するとき, N が初めて $\boxed{\text{カ}}$ より大きくなるのは, $a=\boxed{\text{キ}}$ のときである。

〔2〕 k を定数とする。自然数 m, n に関する条件 p, q, r を次のように定める。

$$p: m > k \text{ または } n > k \quad q: mn > k^2 \quad r: mn > k$$

(1) 次の $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを, 下の $\textcircled{0} \sim \textcircled{3}$ のうちから一つ選べ。

p の否定 \bar{p} は $\boxed{\text{ク}}$ である。

$$\textcircled{0} \quad m > k \text{ または } n > k$$

$$\textcircled{1} \quad m > k \text{ かつ } n > k$$

$$\textcircled{2} \quad m \leq k \text{ かつ } n \leq k$$

$$\textcircled{3} \quad m \leq k \text{ または } n \leq k$$

(2) 次の $\boxed{\text{ケ}} \sim \boxed{\text{サ}}$ に当てはまるものを, 下の $\textcircled{0} \sim \textcircled{3}$ のうちから一つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

(i) $k=1$ とする。 p は q であるための $\boxed{\text{ケ}}$ 。

(ii) $k=2$ とする。 p は r であるための $\boxed{\text{コ}}$ 。 p は q であるための $\boxed{\text{サ}}$ 。

$$\textcircled{0} \quad \text{必要十分条件である}$$

$$\textcircled{1} \quad \text{必要条件であるが, 十分条件でない}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{十分条件であるが, 必要条件でない}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{必要条件でも十分条件でもない}$$

第2問 (配点25)

a, b を定数として2次関数 $y = -x^2 + (2a+4)x + b \dots \textcircled{1}$ について考える。関数 $\textcircled{1}$ のグラフ G の頂点の座標は $(a + \boxed{\text{ア}}, a^2 + \boxed{\text{イ}} a + b + \boxed{\text{ウ}})$ である。以下, この頂点が直線 $y = -4x - 1$ 上にあるとする。このとき, $b = -a^2 - \boxed{\text{エ}} a - \boxed{\text{オカ}}$ である。

(1) グラフ G が x 軸と異なる2点で交わるような a の値の範囲は $a < \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。また, G が x

軸の正の部分と負の部分の両方で交わるような a の値の範囲は

$$-\boxed{\text{コ}} - \sqrt{\boxed{\text{サ}}} < a < -\boxed{\text{コ}} + \sqrt{\boxed{\text{サ}}} \text{ である。}$$

(2) 関数 $\textcircled{1}$ の $0 \leq x \leq 4$ における最小値が -22 となるのは $a = \boxed{\text{シス}}$ または $a = \boxed{\text{セ}}$ のときである。また $a = \boxed{\text{セ}}$ のとき, 関数 $\textcircled{1}$ の $0 \leq x \leq 4$ における最大値は $\boxed{\text{ソタチ}}$ である。一方, $a = \boxed{\text{シス}}$ のときの $\textcircled{1}$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ツ}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{テトナ}}$ だけ平行移動すると, $a = \boxed{\text{セ}}$ のときのグラフと一致する。

第3問 (配点 30)

$\triangle ABC$ において、 $AB=AC=3$ 、 $BC=2$ であるとき $\cos \angle ABC = \frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ 、 $\sin \angle ABC = \frac{\text{ウ}}{\text{オ}} \sqrt{\frac{\text{エ}}{\text{オ}}}$

であり、 $\triangle ABC$ の面積は $\text{カ} \sqrt{\text{キ}}$ 、 $\triangle ABC$ の内接円 I の半径は $\frac{\sqrt{\text{ク}}}{\text{ケ}}$ である。また、

円 I の中心から点 B までの距離は $\frac{\sqrt{\text{コ}}}{\text{サ}}$ である。

(1) 辺 AB 上の点 P と辺 BC 上の点 Q を、 $BP=BQ$ かつ $PQ=\frac{2}{3}$ となるようにとる。このとき、 $\triangle PBQ$ の

外接円 O の直径は $\frac{\sqrt{\text{シ}}}{\text{ス}}$ であり、円 I と円 O は セ 。ただし、 セ には次の①～④から当てはまるものを一つ選べ。

- ① 重なる (一致する) ② 内接する ③ 外接する
④ 異なる2点で交わる ⑤ 共有点をもたない

(2) 円 I 上に点 E と点 F を、3点 C 、 E 、 F が一直線上にこの順に並び、かつ、 $CF=\sqrt{2}$ となるように

とる。このとき、 $CE=\frac{\sqrt{\text{ソ}}}{\text{タ}}$ 、 $\frac{EF}{CE} = \text{チ}$ である。さらに、円 I と辺 BC との接点を D 、

線分 BE と線分 DF との交点を G 、線分 CG の延長と線分 BF との交点を M とする。このとき、

$\frac{GM}{CG} = \frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$ である。

第4問 (配点 25)

1から9までの数字が一つずつ書かれた9枚のカードから5枚のカードを同時に取り出す。このようなカードの取り出し方は アイウ 通りある。

(1) 取り出した5枚のカードの中に5と書かれたカードがある取り出し方は エオ 通りであり、5と書かれたカードがない取り出し方は カキ 通りである。

(2) 次のように得点を定める。

- ・取り出した5枚のカードの中に5と書かれたカードがない場合は、得点を0点とする。
- ・取り出した5枚のカードの中に5と書かれたカードがある場合、この5枚を書かれている数の小さい順に並べ、5と書かれたカードが小さい方から k 番目にあるとき、得点を k 点とする。

得点が0点となる確率は $\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である。得点が1点となる確率は $\frac{\text{コ}}{\text{サシス}}$ で、得点が2点とな

る確率は $\frac{\text{セ}}{\text{ソタ}}$ 、得点が3点となる確率は $\frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$ である。また、得点の期待値は $\frac{\text{テ}}{\text{ト}}$

点である。

数学II・数学B (60分, 100点)

第1問 (必答問題) (配点 30)

- (1) $a > 0, a \neq 1$ として, 不等式 $2\log_a(8-x) > \log_a(x-2) \dots \textcircled{1}$ を満たす x の値の範囲を求めよう。真数は正であるから, $\text{ア} < x < \text{イ}$ が成り立つ。ただし, 対数 $\log_a b$ に対し, a を底といひ, b を真数という。底 a が $a < 1$ を満たすとき, 不等式 $\textcircled{1}$ は $x^2 - \text{ウエ}x + \text{オカ} \text{キ} 0 \dots \textcircled{2}$ となる。ただし, キ については, 当てはまるものを, 次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{2}$ のうちから一つ選べ。
- $\textcircled{0} < \quad \textcircled{1} = \quad \textcircled{2} >$

したがって, 真数が正であることと $\textcircled{2}$ から, $a < 1$ のとき, 不等式 $\textcircled{1}$ を満たす x のとり得る値の範囲は $\text{ク} < x < \text{ケ}$ である。同様に $a > 1$ のときには, 不等式 $\textcircled{1}$ を満たす x のとり得る値の範囲は $\text{コ} < x < \text{サ}$ であることがわかる。

- (2) $0 \leq \alpha \leq \pi$ として $\sin \alpha = \cos 2\beta$ を満たす β について考えよう。ただし, $0 \leq \beta \leq \pi$ とする。たとえば, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき, β のとり得る値は $\frac{\pi}{\text{シ}}$ と $\frac{\text{ス}}{\text{シ}}\pi$ の二つである。このように, α の各値に対して, β のとり得る値は二つある。そのうちの小さい方を β_1 , 大きい方を β_2 とし, $y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right)$ が最大となる α の値とそのときの y の値を求めよう。 β_1, β_2 を α を用いて表すと, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ のときは $\beta_1 = \frac{\pi}{\text{セ}} - \frac{\alpha}{\text{ソ}}, \beta_2 = \frac{\text{タ}}{\text{セ}}\pi + \frac{\alpha}{\text{ソ}}$ となり, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ のときは, $\beta_1 = -\frac{\pi}{\text{チ}} + \frac{\alpha}{\text{ツ}}, \beta_2 = \frac{\text{テ}}{\text{チ}}\pi - \frac{\alpha}{\text{ツ}}$ となる。したがって, $\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}$ のとり得る値の範囲は $\frac{\text{ト}}{\text{ナ}}\pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{\text{ニヌ}}{\text{ネ}}\pi$ である。よって, y が最大となる α の値は $\frac{\text{ノ}}{\text{ハヒ}}\pi$ であり, そのときの y の値は フ であることがわかる。 フ に当てはまるものを, 次の $\textcircled{0} \sim \textcircled{3}$ のうちから一つ選べ。
- $\textcircled{0} \frac{1}{2} \quad \textcircled{1} 1 \quad \textcircled{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \textcircled{3} \frac{\sqrt{3}}{2}$

第2問 (必答問題) (配点 30)

座標平面上で曲線 $y = x^3$ を C とし, 放物線 $y = x^2 + px + q$ を D とする。

- (1) 曲線 C 上の点 $P(a, a^3)$ における C の接線の方程式は $y = 3a\text{ア}x - \text{イ}a\text{ウ}$ である。放物線 D は点 P を通り, D の P における接線と, C の P における接線が一致するとする。このとき, p と q を a を用いて表すと

$$\begin{cases} p = 3a\text{エ} - \text{オ}a \\ q = \text{カキ}a^3 + a\text{ク} \end{cases} \dots \textcircled{1} \text{ となる。}$$

以下, p, q は $\textcircled{1}$ を満たすとす。

(2) 放物線 D が y 軸上の与えられた点 $Q(0, b)$ を通るとき $b = \boxed{\text{ケコ}} a^3 + a \boxed{\text{サ}} \dots$ ② が成り立つ。与えられた b に対して、②を満たす a の値の個数を調べよう。そのために、関数 $f(x) = \boxed{\text{ケコ}} x^3 + x \boxed{\text{サ}}$ の増減を調べる。関数 $f(x)$ は $x = \boxed{\text{シ}}$ で極小値 $\boxed{\text{ス}}$ をとり、 $x = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ で極大値 $\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ をとる。関数 $y=f(x)$ のグラフをかくことにより、 $\boxed{\text{ス}} < b < \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ のとき、②を満たす a の値の個数は $\boxed{\text{テ}}$ であることがわかる。

(3) 放物線 D の頂点が x 軸上にあるのは、 $a = \boxed{\text{ト}}$ 、 $\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ の二つの場合である。 $a = \boxed{\text{ト}}$ のときの放物線を D_1 、 $a = \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ のときの放物線を D_2 とする。 D_1 、 D_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{2}{3} \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である。

第3問 (選択問題) (配点 20)

$\{a_n\}$ を $a_2 = -\frac{7}{3}$ 、 $a_5 = -\frac{25}{3}$ である等差数列とし、自然数 n に対して、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおく。
 $a_1 = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり、 $\{a_n\}$ の公差は $\boxed{\text{エオ}}$ である。したがって $a_n = \boxed{\text{カキ}} n + \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) $S_n = \boxed{\text{コ}} n^2 + \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である。次に、数列 $\{b_n\}$ は $\sum_{k=1}^n b_k = \frac{4}{3} b_n + S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) \dots ① を満たすとする。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。①から、 $b_1 = \boxed{\text{ス}}$ である。さらに、 $\sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^n b_k + b_{n+1}$ に注意して、①を利用すると $b_{n+1} = \boxed{\text{セ}} b_n + \boxed{\text{ソ}} n + \boxed{\text{タ}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立ち、この等式は $b_{n+1} + \boxed{\text{チ}}(n+1) + \boxed{\text{ツ}} = \boxed{\text{セ}}(b_n + \boxed{\text{チ}} n + \boxed{\text{ツ}})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) と変形できる。ここで $c_n = b_n + \boxed{\text{チ}} n + \boxed{\text{ツ}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) \dots ② とおくと、 $\{c_n\}$ は、 $c_1 = \boxed{\text{テ}}$ 、公比が $\boxed{\text{ト}}$ の等比数列であるから、②により、 $b_n = \boxed{\text{ナ}} \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} - \boxed{\text{ヌ}} n - \boxed{\text{ネ}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である。ただし、 $\boxed{\text{ニ}}$ については、当てはまるものを、次の ①～④ のうちから一つ選べ。
 ① $n-2$ ② $n-1$ ③ n ④ $n+1$ ⑤ $n+2$

第4問 (選択問題) (配点 20)

空間に異なる4点 O, A, B, C を $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ 、 $\vec{OB} \perp \vec{OC}$ 、 $\vec{OC} \perp \vec{OA}$ となるようにとり、 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ 、 $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく。さらに、3点 D, E, F を、 $\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b}$ 、 $\vec{OE} = \vec{b} + \vec{c}$ 、 $\vec{OF} = \vec{a} + \vec{c}$ となるようにとり、線分 BD の中点を L 、線分 CE の中点を M とし、線分 AD を 3:1 に内分する点を N とする。

(1) \vec{OM} 、 \vec{ON} は \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて $\vec{OM} = \frac{1}{\boxed{\text{ア}}} \vec{b} + \vec{c}$ 、 $\vec{ON} = \vec{a} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} \vec{b}$ と表される。

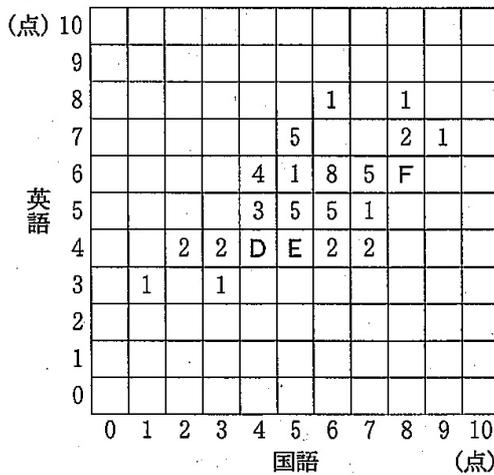
また、次の表は、Aクラスの20人について、上の表の国語と英語の得点の平均値と分散をまとめたものである。ただし、表の数値はすべて正確な値であり、四捨五入されていない。

	国語	英語
平均値	B	6.0
分散	1.60	C

以下、小数の形で解答する場合、指定された桁数の一つ下の桁を四捨五入し、解答せよ。途中で割り切れた場合、指定された桁まで0にマークすること。

- (1) Aクラスの20人のうち、国語の得点が4点の生徒は 人であり、英語の得点が国語の得点以下の生徒は 人である。
- (2) Aクラスの20人について、国語の得点の平均点Bは . 点であり、英語の得点の分散Cの値は . である。
- (3) Aクラスの20人のうち、国語の得点が平均値 . 点と異なり、かつ、英語の得点も平均値6.0点と異なる生徒は 人である。Aクラスの20人について、国語の得点と英語の得点の相関係数の値は . である。

次の表は、Aクラスの20人と他のクラスの40人を加えた60人の生徒について、前の表と同じ国語と英語のテストの結果をまとめたものである。この60人について、国語の得点の平均値も英語の得点の平均値も、それぞれちょうど5.4点である。



- (4) 上の表でD, E, Fを除いた人数は52人である。その52人について、国語の得点の合計は 点であり、英語の得点の合計は288点である。したがって、連立方程式 $D+E+F=$, $4D+5E+8F=$, $4D+4E+6F=36$ を解くことによって、D, E, Fの値は、それぞれ、 人、 人、 人であることがわかる。
- (5) 60人からAクラスの20人を除いた40人について、英語の得点の平均値は . 点であり、中央値は . 点である。
- (6) 60人のうち、国語の得点が x 点である生徒について、英語の得点の平均値 $M(x)$ と英語の得点の中央値 $N(x)$ を考える。ただし、 x は1以上9以下の整数とする。このとき、 $M(x) = N(x)$ となる x は 個ある。一方、 $M(x) < x$ かつ $N(x) < x$ となる x は 個ある。

第6問 (選択問題) (配点 20)

与えられた二つの自然数 M と N について、 M から始まる N 個の連続する自然数の積 $M \times (M+1) \times (M+2) \times \dots \times (M+N-1)$ が 8 で割り切れるかどうかを調べ、その結果を出力する〔プログラム 1〕を作成した。ただし、 $\text{INT}(X)$ は X を超えない最大の整数を表す関数である。

〔プログラム 1〕

```

100 INPUT PROMPT "M"=:M
110 INPUT PROMPT "N"=:N
120 

130 FOR I=0 TO 
140   LET X=X*(M+I)
150 NEXT I
160 IF  THEN
170   PRINT "8 で割り切れます"
180   
190 END IF
200 PRINT "8 で割り切れません"
210 END

```

(1) 〔プログラム 1〕の に当てはまるものを、次の ①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | |
|---------------|-----------|-------------|
| ① LET X=0 | ④ LET X=1 | ② LET X=M |
| ③ LET X=M+N-1 | ⑤ LET N=M | ⑥ LET N=M+N |

に当てはまるものを、次の ①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | |
|-------|---------|-------|
| ① M-1 | ④ M | ② N-1 |
| ③ N | ⑤ M+N-1 | ⑥ M+N |

に当てはまるものを、次の ①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| ① $N - \text{INT}(N/8) * 8 < 0$ | ④ $N - \text{INT}(N/8) * 8 = 0$ | ② $N - \text{INT}(N/8) * 8 > 0$ |
| ③ $X - \text{INT}(X/8) * 8 < 0$ | ⑤ $X - \text{INT}(X/8) * 8 = 0$ | ⑥ $X - \text{INT}(X/8) * 8 > 0$ |

に当てはまるものを、次の ①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| ① LET X=X+1 | ④ LET M=M+1 | ② LET X=X/8 |
| ③ GOTO 150 | ⑤ GOTO 200 | ⑥ GOTO 210 |

(2) 〔プログラム 1〕を実行したとき、「8 で割り切れます」と出力されるような変数 M , N への入力について、 $M+N$ の値の最小値は である。また、変数 M にどんな自然数を入力しても、つねに「8 で割り切れます」と出力されるような変数 N への入力がある。このような変数 N への入力のうち、最小の自然数は である。二つの自然数 M と L が与えられたとき、条件「 N は L 以下の自然数であり、かつ M から始まる N 個の連続する自然数の積 $M \times (M+1) \times (M+2) \times \dots \times (M+N-1)$ は 2^N で割り切れるが 2^{N+1} では割り切れない」…(*) を満たす N の個数を求めたい。そのために、〔プログラム 1〕を変更して、〔プログラム 2〕を作成した。ただし 100 行と、120 行から 150 行まで、190 行、210 行は変更していない。

〔プログラム 2〕

```

100 INPUT PROMPT "M"=:M
110 INPUT PROMPT "L"=:L

```

```

112  キ
114  FOR N=1 TO L
120  ア
130  FOR I=0 TO イ
140  LET X=X*(M+I)
150  NEXT I
152  LET K=2^N
160  IF ク THEN
170  LET K=K*2
180  IF ケ THEN
182  コ
184  END IF
190  END IF
200  NEXT N
202  PRINT "求める個数は";C
210  END

```

(3) [プログラム 2] の キ に当てはまるものを、次の ①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | |
|-----------|-------------|-------------|
| ① LET C=0 | ② LET C=M-1 | ③ LET C=L-1 |
| ④ LET C=1 | ⑤ LET C=M | ⑥ LET C=L |

ク, ケ に当てはまるものを、次の ①～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを選んでよい。

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| ① $N - \text{INT}(N/K) * K < 0$ | ② $N - \text{INT}(N/K) * K = 0$ | ③ $N - \text{INT}(N/K) * K > 0$ |
| ④ $X - \text{INT}(X/K) * K < 0$ | ⑤ $X - \text{INT}(X/K) * K = 0$ | ⑥ $X - \text{INT}(X/K) * K > 0$ |

コ に当てはまるものを、次の ①～⑤のうちから一つ選べ。

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| ① LET X=X+1 | ② LET N=N+1 | ③ LET K=K*2 |
| ④ LET C=C+1 | ⑤ GOTO 200 | ⑥ GOTO 210 |

(4) [プログラム 2] を実行し、変数 M に 4、変数 L に 5 を入力したとき、202 行で出力される変数 C の値は サ である。

(5) [プログラム 2] において、条件(*)を満たす N の値をすべて出力するためには、たとえば、シ に PRINT N

という行を挿入すればよい。シ に当てはまるものを、次の ①～③のうちから一つ選べ。

- | | |
|------------------|------------------|
| ① 110 行と 112 行の間 | ② 150 行と 152 行の間 |
| ③ 180 行と 182 行の間 | ④ 200 行と 202 行の間 |