

有限数列と繰り返す数列

柏陵高等学校 氏家 悟

1 教科書の記述

教科書の階差数列の問題では、有限個の数列の階差をとり、その規則性から一般項を求めるような書き方をするのがツネである。たとえば、

問 1 次のような数列 $\{a_n\}$ の一般項を階差数列を用いて求めよ。

3, 4, 6, 9, 13, 18, …

のような問題の場合、階差数列は初項 1, 公差 1 の等差数列

1, 2, 3, 4, 5, …

なので、一般項は $3 + \frac{n(n-1)}{2}$ となる寸法である。

ここで昔から自分が、ひそかに突っ込みを入れているのは、階差数列

1, 2, 3, 4, 5, …

が、たまたま最初の 5 項が等差数列だからと言って、6 項目以降の保証がないということ。

教科書でも、等差数列の単元の場合は、

等差数列 1, 4, 7, 10, 13, … の一般項を求めよ。

のように書かれていて、等差数列であることを保証している。階差数列の問題では、「勝手な類推」なのである。

2 有限数列

問 2 次のような等比数列 $\{a_n\}$ の第 5 項を求めよ。

1, 2, 4, 8, …

ならば、答えは 16 である。しかし、

問 3 次のような数列 $\{a_n\}$ の第 5 項を求めよ。

$$1, 2, 4, 8, \dots$$

では事情は一変する。結論から言えば、どんな数字を書いても正解である。

たとえば、階差数列 $\{b_n\}$ を取る。

$$1, 2, 4, \dots$$

さらに、 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ を取る。

$$1, 2, \dots$$

これは、初項 1、公差 1 の等差数列なので、 $c_3 = 3$ 。したがって、 $b_4 = 7$ 、よって元の数列の第 5 項は 15。この調子で、

$$1, 2, 4, 8, 15, 26, 42, \dots$$

と続く。一般項は $1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (1 + \sum_{h=1}^{k-1} c_h) = \frac{1}{6}n(n^2 - 3n + 8)$ である。この一般項は、有限数列 $\{1, 2, 4, 8\}$ で決まる多項式を考えることによって、求めることもできる。実際、

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4, f(4) = 8$$

を満たす多項式 $f(x)$ を考える。4 項が与えられているので、自由度 4 の 3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ であればよい。連立方程式、

$$\begin{aligned} f(1) &= a + b + c + d = 1, & f(2) &= 8a + 4b + 2c + d = 2, & f(3) &= 27a + 9b + 3c + d = 4, \\ f(4) &= 64a + 16b + 4c + d = 8 \end{aligned}$$

を解いて、

$$a = \frac{1}{6}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{4}{3}, d = 0$$

より、一般項 $\frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{4}{3}n = \frac{1}{6}n(n^2 - 3n + 8)$ を得る。

さて問 3 の答はこれら以外に、いかなる数でも取ることができる。第 5 項を 3 にしたければ、4 次関数 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ を考え、連立方程式

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4, f(4) = 8, f(5) = 3$$

を解き、一般項は $\frac{1}{6}(-3n^4 + 31n^3 - 108n^2 + 158n - 72)$ である。

つまり、有限数列を与えて、その規則性を考えさせる問題自体、ナンセンスといえる。問 1 の解答に出てくる「階差数列 1, 2, 3, 4, 5 は初項 1、公差 1 の等差数列なので」に対する自分のひそかな突っ込みは、そこにある。階差数列 $\{b_n\}$ が

$$1, 2, 3, 4, 5, 0, \dots$$

と自分で勝手に決めてしまえば, $b_n = -\frac{1}{20}(n-6)(n^4 - 9n^3 + 31n^2 - 39n + 20)$ となるので, この場合の間1の一般項は, $a_n = \frac{1}{120}(-n^6 + 21n^5 - 175n^4 + 735n^3 - 1564n^2 + 1704n - 360)$ であり数列は,

$$3, 4, 6, 9, 13, 18, 18, -11, -129, \dots$$

のようになる。有限数列は, それに合う多項式をいつでも作ることができるのである。

だからといって, 教科書の記述を否定するものではない。そこは教育的配慮というものがある。ただ, 答えの可能性を述べているだけである。

3 漸化式

階差数列を扱った後にほどなく出てくるのが漸化式である。

$a_{n+1} = a_n + f(n)$ の形なら, 階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n = f(n)$ がやさしいので, $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ として, 一般項が求まる。

$a_{n+1} = pa_n + q$ の形は, 理屈をちゃんと説明するのは面倒なので, 「こうすればできるからやり方だけ覚えろ, どうしても理屈を知りたいければ放課後にでもたっぷり時間をかけて教える。」となる。ただ, $a_{n+1} = 3a_n - 2$ と, $a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$ は全く同値な式であることは, 授業中に強調するが。

さらに, 「答えは, 公比 p の等比数列がらみだよ。」とか「実際に並べて, 階差数列で解いてもよいよ。」ということも。

自分としては, 漸化式を解くのに「並べて, 階差数列」は好きである。 $a_{n+1} = 3a_n - 2, a_1 = 3$ を並べると,

$$3, 7, 19, \dots$$

$a_{n+1} = 3a_n - 2$ は, 公比 3 の等比数列を平行移動したものだから, 階差数列では定数項 -2 が消えて, 必ず公比 3 の等比数列になる。階差数列は

$$4, 12, \dots$$

2項しかなくても, これは公比 3 の等比数列なのだから, $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}, a_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 4 \cdot 3^{k-1}$ といえる。

さて, 漸化式の単元で自分がよくテストに出すのが,

問 4 数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 項 a_n, a_{n+1} の関係を表す漢字 3 文字と, 読み方を書きなさい。

授業中に発音練習し, 字を書かせ, テストに出すことを予告しても, 「漸化式」や「ざんかしき」はなくなる。漢字に関しては「暫化式」「軟化式」「漱化式」のほか, 辞書に載っていないようないろいろな形が出てくる*1。

*1三角関数の正接の漸近線でも同じ問題を出すのが, 一度「前立線」という答にびっくり。

4 3項間漸化式

3項間の漸化式は、今使っている教科書には無いが、土曜日のあった時代（の進学校）では、授業で取り上げたこともある。

有名なのは Fibonacci 数列 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

1, 1, 2, 3, 5, 8, …

で、自然界のいろいろなどところに現れる数列としても知られていて、演習問題として、一般項を求める問題を取り扱ったりした。一般項は、黄金比 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ に対し、 $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - (-\phi)^{-n}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ と求められる。

当時、テストに出したのが、

問 5 次のような数列 $\{a_n\}$ を 3 項間の漸化式で表し、一般項を求めよ。

1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1…

といった、繰り返す数列。漸化式は、 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ となり、Fibonacci 数列の一般項を導く手順で求めれば、一般項は $x^2 + x + 1 = 0$ の解（つまり 1 の原始 6 乗根）を $\phi = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおけば、

$$a_n = \frac{\phi^n - \phi^{-n}}{\phi - \phi^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}i} \left(\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right)^n \right)$$

「1 の原始 6 乗根」とあるとおり、繰り返す数列は、単位円の周りをぐるぐる回るイメージがあれば、三角関数で表すことができ、そのほうが簡単である。これは、6 個の繰り返しであるから、 $\frac{\pi}{3}$ ずつ角度を進めた三角関数になる。その正弦は、

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \dots$$

なので、それを $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍した、

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\pi}{3} n$$

もこの数列の一般項である。これに気づいた生徒は、120 人余りの中で一人だけであった*2。

5 繰り返す数列

このように、繰り返す数列は回転を考えることにより、見通しがよくなる。数列の導入で、

*2現東工大の逆井卓也さん

問 6 次のような数列 $\{a_n\}$ の一般項を言え。

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

を考えさせたりして、もちろん $(-1)^n$ が言えればよいのであるが、これも、 $\cos \pi n$ と表せる^{*3}。これは等比数列であるとも考えれば、その公式どおりということにはなるが。

2つずつの繰り返しは $(-1)^n$ を組み合わせることで表現できる。

$$3, 7, 3, 7, 3, 7, \dots$$

の一般項は $a_n = 5 + 2(-1)^n$ である。

3つの繰り返し、

問 7 次のような数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$$

の場合は、角を $\frac{2\pi}{3}$ ずつ進めた正弦が

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \dots$$

なので、これを $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍して整数にし、

$$1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots$$

2を足して、

$$3, 1, 2, 3, 1, 2, \dots$$

となる。これを2番目から始めればよいので、一般項は

$$a_n = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3}(n+1)$$

と書ける。

三角関数を使わなければ公比が、1の原始3乗根 ($x^2 + x + 1 = 0$ の解) $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ である等比数列を使えば、3つの繰り返しになる。 $\omega^3 = 1$ より初項、公比 ω の等比数列 $\{\omega^n\}$ は、

$$\omega, \omega^2, 1, \omega, \omega^2, 1, \dots$$

となる。これから初項、公比 ω^2 の等比数列 $\{(\omega^2)^n\}$

$$\omega^2, \omega, 1, \omega^2, \omega, 1, \dots$$

を引けば、

^{*3}-1 は 1 の原始 2 乗根

$$\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, 0, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, 0, \dots$$

なので、これを $\sqrt{3}i$ で割れば、

$$1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots$$

をとり、2を加えて、番号をずらした

$$a_n = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}i} \left(\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^{n+1} \right)$$

も一般項である。

この形からわかるとおり、数列 $\{b_n\}$

$$1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots$$

は、3項間漸化式

$$b_{n+2} = -b_{n+1} - b_n, b_1 = 1, b_2 = -1$$

を解いたものでもある。 $a_n = b_n + 2$ なので、

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$$

の漸化式は、 $(a_{n+2} - 2) = -(a_{n+1} - 2) - (a_n - 2)$, より、

$$a_{n+2} = -a_{n+1} - a_n + 6, a_1 = 1, a_2 = 2$$

と表されることがわかる。

ちなみに、三角関数で表されたものと、原始3乗根で表されたものとは互いに簡単な式変形で導くことができる。実際、

$$1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots$$

の一般項に現れる原始3乗根は、 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ なので、

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n = \cos \frac{2\pi}{3} n + i \sin \frac{2\pi}{3} n$$

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^n = \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^n = \cos \frac{2\pi}{3} n - i \sin \frac{2\pi}{3} n$$

より

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n - \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^n = 2i \sin \frac{2\pi}{3} n$$

となるからである。

問 8 次のような数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$1, 2, 4, 1, 2, 4, \dots$$

さて、3つの繰り返しが等差数列ならやさしいが、この場合は3項は等比数列

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^0, 2^1, 2^2, \dots$$

になっているから、指数が

$$0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots$$

で、 $\left\{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3}(n+1)\right\}$ であることがわかり、一般項は

$$a_n = 2^{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3}(n+1)}$$

である。

問 9 次のような数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$1, 5, 6, 1, 5, 6, \dots$$

ならどうか。

ここで、先に述べた「有限数列は、それに合う多項式をいつでも作る事ができる」事実を使う。数列

$$1, 5, 6$$

を表す関数は、3点を通る2次関数 $f(x)$ で、

$$f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 6$$

である。 $f(x) = ax^2 + bx + c$ において関数を求めると、 $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{2}x - 6$ 。

そして、

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$$

は数列 $\left\{2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3}(n+1)\right\}$ だったので、これを2次関数 $f(x)$ に代入して、一般項

$$a_n = -\frac{3}{2} \left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3}(n+1)\right)^2 + \frac{17}{2} \left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3}(n+1)\right) - 6$$

を得る。

6 mod も使ってしまう

三角関数ではなく、mod も関数だと思って使えば、もっとすっきりと書ける。

$$17 \equiv 2 \pmod{3}$$

という形は使いづらいので、表計算ソフトの関数のように、3で割った余りを、

$$\text{mod}(17, 3)$$

と書くことにすれば、数列 $\{\text{mod}(n, 3)\}$ は、

$$1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots$$

を表す。したがって、

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$$

は、 $\{\text{mod}(n-1, 3) + 1\}$ と表される。

問 10 1年のうち31日まである大の月 1,3,5,7,8,10,12 を繰り返す、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, \dots$$

有限数列 $\{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12\}$ の一般項は6次式

$$f(n) = \frac{1}{360}(-5n^6 + 117n^5 - 1070n^4 + 4845n^3 - 11345n^2 + 13578n - 5760)$$

と表される。

一方、

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

は、

$$\text{mod}(n-1, 7) + 1$$

であるから、これを $f(\)$ に代入したものが一般項となる。

$$a_n = \frac{1}{360}(-5(\text{mod}(n-1, 7) + 1)^6 + 117(\text{mod}(n-1, 7) + 1)^5 - 1070(\text{mod}(n-1, 7) + 1)^4 + 4845(\text{mod}(n-1, 7) + 1)^3 - 11345(\text{mod}(n-1, 7) + 1)^2 + 13578(\text{mod}(n-1, 7) + 1) - 5760)$$

7 三角関数にこだわる

$\text{mod}(n, 7)$ を三角関数で表せれば、問 10 も三角関数になる。

つまり、 $\sin \frac{2\pi}{7}n$ から、 $\text{mod}(n, 7)$ への対応を求めればよい。これには、 $\sin \frac{2\pi}{7}n$ の6次式

$$g(n) = p(\sin \frac{2\pi n}{7})^6 + q(\sin \frac{2\pi n}{7})^5 + r(\sin \frac{2\pi n}{7})^4 + s(\sin \frac{2\pi n}{7})^3 + t(\sin \frac{2\pi n}{7})^2 + u(\sin \frac{2\pi n}{7}) + v$$

の n に、

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

を代入して、値が $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ になるような係数

$$p, q, r, s, t, u, v$$

を求めて $f(n)$ を確定させればよい。

つまり、連立方程式

$$g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 3, g(4) = 4, g(5) = 5, g(6) = 6,$$

を解けばよい、たとえば、 $g(3) = p(\sin \frac{2\pi \cdot 3}{7})^6 + q(\sin \frac{2\pi \cdot 3}{7})^5 + r(\sin \frac{2\pi \cdot 3}{7})^4 + s(\sin \frac{2\pi \cdot 3}{7})^3 + t(\sin \frac{2\pi \cdot 3}{7})^2 + u(\sin \frac{2\pi \cdot 3}{7}) + v = 3$ である。

この 7 元 1 次方程式の厳密解は、大変煩雑でとても書ききれぬものではない。この関数の係数の数値表現は、

$$g(n) = 32(\sin \frac{2\pi n}{7})^6 + 12.7596(\sin \frac{2\pi n}{7})^5 - 56(\sin \frac{2\pi n}{7})^4 - 15.0365(\sin \frac{2\pi n}{7})^3 + 28(\sin \frac{2\pi n}{7})^2 + 1.22612(\sin \frac{2\pi n}{7}) + 0$$

となった。これが、0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15... に対して、

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 1, \dots$$

を返す関数となる。

あるいは、1 の原始 7 乗根

$$\omega = \frac{1}{12} \left(-2 + (28 + 84\sqrt{3}i)^{\frac{1}{3}} + (28 - 84\sqrt{3}i)^{\frac{1}{3}} + \sqrt{-84 - 4(28 - 84\sqrt{3}i)^{\frac{1}{3}} + (28 - 84\sqrt{3}i)^{\frac{2}{3}} - 4(28 + 84\sqrt{3}i)^{\frac{1}{3}} + (28 + 84\sqrt{3}i)^{\frac{2}{3}}} \right)$$

を使えば、これは $\omega = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ を表すので、

$$\sin \frac{2\pi}{7} n = \frac{\omega^n - \omega^{-n}}{2i} = \frac{(0.6235 + 0.7818i)^n - (0.6235 - 0.7818i)^n}{2i}$$

によって、見かけ上は三角関数も使わずに、 $\text{mod}(n, 7)$ を虚数の多項式で表すことができる。

$$g(n) = 32 \left(\frac{(0.6235 + 0.7818i)^n - (0.6235 - 0.7818i)^n}{2i} \right)^6 + 12.7596 \left(\frac{(0.6235 + 0.7818i)^n - (0.6235 - 0.7818i)^n}{2i} \right)^5 - 56 \left(\frac{(0.6235 + 0.7818i)^n - (0.6235 - 0.7818i)^n}{2i} \right)^4 - 15.0365 \left(\frac{(0.6235 + 0.7818i)^n - (0.6235 - 0.7818i)^n}{2i} \right)^3 + 28 \left(\frac{(0.6235 + 0.7818i)^n - (0.6235 - 0.7818i)^n}{2i} \right)^2 + 1.22612 \left(\frac{(0.6235 + 0.7818i)^n - (0.6235 - 0.7818i)^n}{2i} \right)$$

8 オンライン整数列大辞典

ご存知の方も多いと思うが、オンライン整数列大辞典

<http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html?language=japanese>

を眺めるのは、いろいろと興味深い。

$$1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$$

を検索すると、 mod のほかにもいろいろと出てくる。