1円，5円，10円の3種類の硬貨で567円を支払う方法は，何通り？

柏陵高等学校　西川 誠

例えば「1円，5円，10円玉の3種類の硬貨で，20円を支払うには，何通りの方法があるか？」と聞かれたら，10円が2枚のときどうなるか，10円が1枚のときどうなるか，$\cdots$ と順次10円玉の枚数を減らしていって数え上げるのが普通の解法だと思います。今回のレポートでは，この素朴な方法から，次に数論入門1（山本芳彦著）の方法を紹介し，これを，さらに一般化してできた奇跡的な公式を紹介したいと思います。面白い計算方法ですので，ぜひ数値実験してみてください。

1　一番素朴な解法

例①「1円玉，5円玉，10円玉で，20円を支払うには，何通りの方法があるか？」なら，表にして，

10円の枚数	2	1	1	1	0	0	0	0	0
5円の枚数	0	2	1	0	4	3	2	1	0
1円の枚数	0	0	5	10	0	5	10	15	20

より，全部で9通りあることがわかります。ただし金額が大きくなると表を作ることが面倒です。

2　数論入門1（山本芳彦著）の方法

「1円玉，5円玉，で $5n$ 円を支払うには，何通りの方法があるか？」という問題は，不定方程式 $a+5b=5n$ の0以上の整数解の個数が何組あるかということと同じ問題になります。（**0以上の整数解の個数**を求める話ばかりなので，これからは，短く**解の個数** と言うことにします。）このの $a+5b=5n$ の解の個数を $A_2(5n)$ とおき，以下同様に，$a+5b+10c=10n$ の解の個数なら $A_3(10n)$ というように表示することにします。

最初に，$a+5b=5n$ の解の個数 $A_2(5n)$ を具体的に求めてみましょう。これは，b に代入できる整数が，0，1，2，$\cdots$ ，n の $(n+1)$ 通りしかないので，$A_2(5n)=n+1$ となります。

次に，$a+5b+10c=10n$ の解の個数 $A_3(10n)$ を求めてみます。$a+5b=10(n-c)$ と考えて，c に代入できる整数が，0，1，2，$\cdots$ ，n ですから，$n-c=k$ とおくと k が0，1，2，$\cdots$ ，n と変化し，$10(n-c)=10k=5\cdot 2k$ より，

$$
\begin{aligned}
A_3(10n) &= A_2(5\cdot 2\cdot 0)+A_2(5\cdot 2\cdot 1)+A_2(5\cdot 2\cdot 2)+\cdots+A_2(5\cdot 2\cdot n)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(2k+1)=2\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1=(n+1)n+(n+1)=(n+1)^2
\end{aligned}
$$

と計算できます。($k=0$ からなので $\sum 1$ が $n+1$ となります。)これをさらに続けて $a+5b+10c+50d=50n$ の解の個数 $A_4(50n)$ は,$a+5b+10c=50(n-d)$ とし,$n-d=k$ が 0,1,2,$\cdots$,n と変化することから,

$$
\begin{aligned}
A_4(50n) &= A_3(10\cdot 5\cdot 0)+A_3(10\cdot 5\cdot 1)+A_3(10\cdot 5\cdot 2)+\cdots+A_3(10\cdot 5\cdot n)\\
&= \sum_{k=0}^{n}(5k+1)^2=25\sum_{k=0}^{n}k^2+10\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1=\frac{1}{6}(n+1)(50n^2+55n+6)
\end{aligned}
$$

となります。現段階での,$A_4()$ という関数の定義域は,$50n$ の形の整数に限定されています。

さらに続けて $a+5b+10c+50d+100e=100n$ の解の個数 $A_5(100n)$ は,同様な計算で,

$$
\begin{aligned}
A_5(100n) &= A_4(50\cdot 2\cdot 0)+A_4(50\cdot 2\cdot 1)+A_4(50\cdot 2\cdot 2)+\cdots+A_4(50\cdot 2\cdot n)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{6}(2k+1)\left(50\cdot(2k)^2+55\cdot(2k)+6\right)\\
&= \frac{1}{6}(n+1)(100n^3+240n^2+131n+6)
\end{aligned}
$$

さらに,$a+5b+10c+50d+100e+500f=500n$ の解の個数 $A_6(500n)$ を求めようとすると,$A_5(100n)$ の公式の n に $5k$ を代入して $\sum$ をとるということになります。これは,$\sum k^4$ の公式も必要になり結構大変な計算です。山本先生の本は,

$$
A_6(500n)=\frac{1}{6}(n+1)(12500n^4+29375n^3+15800n^2-195n+6)
$$

と求めて,話がここで終了となっていました。9 年ほど前に,自分で確認したときも,あまりにも面倒だったため,これ以上追求する気になれませんでした。ところが,2009 年の 5 月ごろに,北海道岩見沢農業高校の加藤秀隆先生から「1 円,5 円,10 円,50 円,100 円玉の 5 種類で,320 円を支払う場合の数を計算で求めることができるのでしょうか?」と聞かれて,山本先生の $A_5()$ の公式には,直接 320 円を代入できないためいろいろ実験してみると,不思議なことに一般的な場合も公式化が可能だったのです。この定義域を拡張した一般的な公式を,次に紹介してみたいと思います。

3 定義域を拡張した一般的な公式 $A_2(n)$,$A_3(n)$,$A_4(n)\cdots$

命題 1 $a+5b=n$ の解の個数 $A_2(n)$ は,$n=5\delta+\varepsilon$ と表示すると $A_2(n)=\delta+1$ となる。ただし,n を 5 で割ったときの商が δ で余りが ε です。

(証明)$a=n-5b$ なので,b に代入できる数は,0,1,2,$\cdots$,δ の $\delta+1$ 個だけであるから,$A_2(n)=\delta+1$ となります。

命題 2 $a+5b+10c=n$ の解の個数 $A_3(n)$ は,$n=10\gamma+5\delta+\varepsilon$ と表示すると,

$$A_3(n) = (\delta+1)(\gamma+1) + \gamma(\gamma+1) = (\gamma+1)(\gamma+1+\delta)$$

になる。ただし，n を 10 で割ったときの商を γ として，余りを 5 で割ったときの商が δ で余りが ε です。

（注意）$n = 10\gamma + 5\delta + \varepsilon$ のような表示のただし書きは，以後も同様なのでもう書きません。

（証明）まず ε の分は，a が分担するしかないので，$n = 10\gamma + 5\delta$ としても場合の数は，変化しません。そこで $a + 5b$ のとる値を，一番小さい 5δ から順次 $5\delta + 10$，$5\delta + 20 \cdots$ と 10 ずつ増やして変化させます。それを式で書くと

$$\begin{aligned} A_3(n) &= A_2(5\delta) + A_2(5\delta+10) + \cdots + A_2(5\delta + 10 \times \gamma) \\ &= (\delta+1) + (\delta+1+2) + \cdots + (\delta+1+2\times\gamma) \\ &= \sum_{k=0}^{\gamma}(\delta+1+2\times k) = (\delta+1)(\gamma+1) + \gamma(\gamma+1) \end{aligned}$$

と求まります。

公式ができたので，このレポートの表題にした問題でチェックしてみます。

（例②）「1 円玉，5 円玉，10 円玉の 3 種類で，567 円を支払うには，何通りの方法があるか？」

（解答） $567 = 10 \times 56 + 5 \times 1 + 2$ と表示されますから $\gamma = 56$，$\delta = 1$，$\varepsilon = 2$ の場合です。公式から，$A_3(567) = (56+1)(56+1+1) = 57 \times 58 = 3306$ 通りとなります。

命題 3 $a + 5b + 10c + 50d = n$ の解の個数 $A_4(n)$ は，$n = 50\beta + 10\gamma + 5\delta + \varepsilon$ と表示すると

$$A_4(n) = \frac{1}{3} \times 25\beta(\beta+1)(\beta+2) + \frac{1}{2} \times 5(2\gamma - 3 + \delta)\beta(\beta+1) + (\gamma+1)(\gamma+1+\delta)(\beta+1)$$

（証明）概略だけ書いておきます。 まず ε は，無視できる事に注意してください。

$$A_4(n) = A_3(10\gamma + 5\delta) + A_3(10\gamma + 5\delta + 50) + \cdots\cdot + A_3(10\gamma + 5\delta + 50 \times \beta)$$

50 ずつ増加することは，$10(\gamma+5) + 5\delta$ のように γ が 5 ずつ増加することに対応します。

$$A_4(n) = \sum_{k=0}^{\beta}(5k+\gamma+1)(5k+\gamma+1+\delta)$$

ここで，$(5k+\gamma+1)(5k+\gamma+1+\delta)$ を $25k(k+1) + 5(2\gamma-3+\delta)k + (\gamma+1)(\gamma+1+\delta)$ と変形してから，$\sum$ をとると公式が求まります。

（例③）「1 円，5 円，10 円，50 円の 4 種類で，948 円を支払うには，何通りの方法があるか？」（解答） $948 = 50 \times 18 + 10 \times 4 + 5 \times 1 + 3$ と表示されますから $\beta = 18$，$\gamma = 4$，$\delta = 1$，$\varepsilon = 3$ となり，公式に代入すると，

$$A_4(948) = \frac{1}{3} \times 25 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 + \frac{1}{2} \times 5 \cdot (2 \cdot 4 - 3 + 1) \cdot 18 \cdot 19 + (4+1)(4+1+1)(18+1) = 57000 + 5130 + 570 = 62700 \text{ 通り}$$

と求まります。948 円という中途半端な金額でも簡単に求まることが面白いですね。

私は，さらに $a + 5b + 10c + 50d + 100e = n$ の解の個数 $A_5(n)$ も求め，さらにとても面倒な計算をやって，$A_6(n)$，$A_7(n)$ なども求めてみました。（これらの式を紹介する事は，場所を取

るのでやめておきます。）計算をやれば答えがでることがわかっていても，こういったやり方では，限界があります。$A_8(n)$ は，無理かなと考えていたのですが，2 ヶ月ぐらいの複雑な計算の後，やっと，2009 年 7 月に，すべて，機械的に計算できることがわかりました。それを紹介するには，まず $\sum k^4$ ，$\sum k^5$，$\sum k^6$ などのべき乗の和を差分・和分で処理することが 1 つと，もう 1 つは，n に $2k$ を代入して $\sum$ を取ったり，n に $5k$ を代入して $\sum$ を取ったりすることを，線形作用素 $M2()$ とか $M5()$ と考えて処理することの 2 つの準備が必要です。

4　線形作用素 M2()，M5()

$A_2(n)=\delta+1$ から $A_3(n)=\gamma(\gamma+1)+(\delta+1)(\gamma+1)$ を求めた過程を，もう少し詳しく検討して，$A_4(n)$，$A_5(n)$，$A_6(n)$，$\cdots$ が機械的に求めていけるようにすることが目標です。まず右側に添え字を付けた新しい記号を作ります。文字 γ を例にとって書くと

$$\gamma_0=1,\ \gamma_1=\frac{\gamma}{1},\ \gamma_2=\frac{\gamma(\gamma-1)}{2\cdot 1},\ \gamma_3=\frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{3\cdot 2\cdot 1},$$

のように定義します。（γ 以外の文字でも同じです。添字が 4 以上のときもあります。）ここで，さらに基底を決めておくことにします。$A_2(n)$ を表示する場合は，基底を δ_1 ，δ_0 とし，$A_3(n)$ を表示する場合は，基底を γ_2，γ_1 ，γ_0 とし，以下同様に設定します。$A_2(n)$，$A_3(n)$ を係数を強調して再度表示すると，$A_2(n)=\delta+1=1\cdot\delta_1+1\cdot\delta_0$ となり，$A_3(n)=\gamma(\gamma+1)+(\delta+1)(\gamma+1)=\gamma(\gamma-1)+(\delta+3)\gamma+(\delta+1)=2\cdot\gamma_2+(\delta+3)\cdot\gamma_1+(\delta+1)\cdot\gamma_0$ となります。この $A_3(n)$ の式で，$\gamma=0$ を代入すると，$\gamma_2=0$，$\gamma_1=0$，$\gamma_0=1$ ですから，$\delta+1$ だけが残り $A_2(n)$ の式と一致します。これは，記号の置き方がうまくいっている証拠の 1 つだと思います。

次に，$A_2(n)=1\cdot\delta_1+1\cdot\delta_0$ から $A_3(n)=2\cdot\gamma_2+(\delta+3)\cdot\gamma_1+(\delta+1)\cdot\gamma_0$ を導くには，$A_2(n)=1\cdot\delta_1+1\cdot\delta_0$ の δ を $2\times k+\delta$ に置き換えて $\sum$ をとるという処理が必要なのですが，このような処理を新しい記号で，$M2()$ 作用素と呼ぶことにします。この作用素は，線形作用素で，δ_1 と δ_0 にどのように作用するかわかれば，$A_2(n)$ 全体への作用もわかるということになります。

まず

$$M2(\delta_0)=M2(1)=\sum_{k=0}^{\gamma}1=\gamma+1=1\cdot\gamma_1+1\cdot\gamma_0$$

となり，次に

$$\begin{aligned}M2(\delta_1)=M2(\delta)&=\sum_{k=0}^{\gamma}(2\times k+\delta)=\gamma(\gamma+1)+\delta(\gamma+1)\\&=\gamma(\gamma-1)+(2+\delta)\gamma+\delta=2\cdot\gamma_2+(\delta+2)\cdot\gamma_1+\delta\cdot\gamma_0\end{aligned}$$

となります。

（注意）$M2()$ 作用素と呼んでいるのは，$M2(\delta_1)=2\cdot\gamma_2+(\delta+2)\cdot\gamma_1+\delta\cdot\gamma_0$ という場合，左辺の δ_1 に 5 とか 7 とかの具体的な数字を入れる訳ではないからです。

δ_1 と δ_0 が $M2()$ 作用素で，どのように変化するかがわかったので，

$$
\begin{aligned}
M2(A_2(n)) = M2(1\cdot\delta_1 + 1\cdot\delta_0) &= 1\cdot M2(\delta_1) + 1\cdot M2(\delta_0) \\
&= 2\cdot\gamma_2 + (\delta+2)\cdot\gamma_1 + \delta\cdot\gamma_0 + 1\cdot\gamma_1 + 1\cdot\gamma_0 \\
&= 2\cdot\gamma_2 + (\delta+3)\cdot\gamma_1 + (\delta+1)\cdot\gamma_0
\end{aligned}
$$

と求められます。基底は決まっているので，係数だけを並べて行列で表示すると次のようになります。

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \delta+2 & 1 \\ \delta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \delta+3 \\ \delta+1 \end{pmatrix}
$$

左の列から $M2(\delta_1) = 2\cdot\gamma_2 + (\delta+2)\cdot\gamma_1 + \delta\cdot\gamma_0$ の係数 2，$(\delta+2)$，δ。

次に $M2(\delta_0) = 1\cdot\gamma_1 + 1\cdot\gamma_0$ の係数 $1, 1$（注意 γ_2 の係数として，0 を追加してあります）。真ん中の行列が，$A_2(n) = 1\cdot\delta_1 + 1\cdot\delta_0$ の係数 $1, 1$ です。右端の行列が $A_3(n) = 2\cdot\gamma_2 + (\delta+3)\cdot\gamma_1 + (\delta+1)\cdot\gamma_0$ の係数です。

次に $a + 5b + 10c + 50d = n$ の解の個数 $A_4(n)$ を，$n = 50\beta + 10\gamma + 5\delta + \varepsilon$ で表そうとすると，$A_3(n) = 2\cdot\gamma_2 + (\delta+3)\cdot\gamma_1 + (\delta+1)\cdot\gamma_0$ の γ を $5\times k + \gamma$ に置き換えて Σ をとるという処理が必要になります。これを $M5()$ 作用素と呼ぶことにします。今度の基底は，β_0，β_1，$\cdots$ になります。詳しい計算過程は，後回しにして，結果だけ表示すると次のようになります。今度は，係数にも右側添え字の付いたものがありますが，これは，そう表示した方が後々便利だからです。

$$
\begin{aligned}
&M5(\gamma_0) = 1\cdot\beta_1 + 1\cdot\beta_0, \\
&M5(\gamma_1) = 5\cdot\beta_2 + (5+\gamma_1)\cdot\beta_1 + \gamma_1\cdot\beta_0, \\
&M5(\gamma_2) = 25\cdot\beta_3 + (35+5\gamma_1)\cdot\beta_2 + (10+5\gamma_1+\gamma_2)\cdot\beta_1 + \gamma_2\cdot\beta_0
\end{aligned}
$$

となるので，行列表示すると，

$$
\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 35+5\gamma_1 & 5 & 0 \\ 10+5\gamma_1+\gamma_2 & 5+\gamma_1 & 1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \delta+3 \\ \delta+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{ア}) \\ (\text{イ}) \\ (\text{ウ}) \\ (\text{エ}) \end{pmatrix}
$$

となり，左辺の 2 つの行列の積を計算したものを（ア）～（エ）とすると，基底との内積が $A_4(n)$ となります。つまり，$A_4(n) = (\text{ア})\cdot\beta_3 + (\text{イ})\cdot\beta_2 + (\text{ウ})\cdot\beta_1 + (\text{エ})\cdot\beta_0$ です。

（ア）～（エ）を公式として表示していませんが，それが，ミソです。これで $A_4(n)$ の式が求まったと見ればよいのです。これは，表計算ソフトで計算可能にするためのターニングポイントです。具体的に，計算して表示しないと求まった気になれなかったことが，最初の私の敗因だったのです。複雑さがどんどん積み重なっていくことになり，計算が途中でいやになってしまい先に行けなかった訳です。「困難は，分割せよ。」という教訓が生きてきます。

$A_4(n)$ の行列表示ができたので，3 節の（例③）を再度やってみます。

（例③：再掲）「1 円，5 円，10 円，50 円の 4 種類で，948 円を支払い方法は，何通り？」

（解答） $948 = 50\times18 + 10\times4 + 5\times1 + 3$ と表示されますから，$\beta = 18$，$\gamma = 4$，$\delta = 1$，$\varepsilon = 3$ となり，$\gamma_2 = \dfrac{4\cdot3}{2\cdot1} = 6$，$\gamma_1 = \dfrac{4}{1} = 4$ です。行列の式に代入すると，

$$\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 35+5\cdot 4 & 5 & 0 \\ 10+5\cdot 4+6 & 5+4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1+3 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 130 \\ 110 \\ 30 \end{pmatrix}$$

また $\beta_3 = \dfrac{18\cdot 17\cdot 16}{3\cdot 2\cdot 1} = 816$，$\beta_2 = \dfrac{18\cdot 17}{2\cdot 1} = 153$ ，$\beta_1 = 18$，$\beta_0 = 1$ より，$A_4(948) = 816\times 50 + 153\times 130 + 18\times 110 + 1\times 30 = 62700$ 通りとなります。

3 節の（例③）で求めた値ともちろん一致しています。この場合には，行列を使ってもそれほど変わりませんが，$A_5()$，$A_6()$ とやっていっても，面倒さがそれほど増加しないという点が重要です。

$M2()$ 作用素と，$M5()$ 作用素というのは，今あげた 2 つの例だけでなく，行列のサイズを 1 行 1 列ずつ増加させながら，別の $M2()$ 作用素とか，$M5()$ 作用素があり，それらを表現する行列を交互に使って下の図のように行列の積を計算すれば，基底の係数が求まります。

$$\underset{M5()\text{ 作用素}}{\begin{pmatrix} & \text{6 行 5 列} & \end{pmatrix}} \underset{M2()\text{ 作用素}}{\begin{pmatrix} & \text{5 行 4 列} & \end{pmatrix}} \underset{M5()\text{ 作用素}}{\begin{pmatrix} & \text{4 行 3 列} & \end{pmatrix}} \underset{M2()\text{ 作用素}}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \delta+2 & 1 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{係数行列} \end{pmatrix}$$

以上のことから，後はこの $M2()$ 作用素とか，$M5()$ 作用素を表現する行列が機械的に求められればよいことになります。そのための準備として，次に特別な形の差分を扱う練習をやってみます。

5　簡単な差分・和分のやり方の紹介

差分・和分の練習を兼ねて $M5(\gamma_0) = 1\cdot\beta_1 + 1\cdot\beta_0$ とか $M5(\gamma_1)$，$M5(\gamma_2)$ を求めてみます。

後々の都合があって $k-1$ から始まるものを和分しています。この場合は，和分した結果の後ろに $+1$ とか -1 とかが付いてきて不便そうですが，最終的な目標のためには，この方がよいのです。

$$\sum_{k=0}^{\beta} 1 = \beta + 1 = \beta_1 + 1$$
$$\sum_{k=0}^{\beta} (k-1) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\beta}\{k(k-1) - (k-1)(k-2)\} = \frac{1}{2}\{(\beta-1) - (-1)(-2)\} = \beta_2 - 1$$
$$\sum_{k=0}^{\beta} \frac{(k-1)(k-2)}{2\cdot 1} = \sum_{k=0}^{\beta} \frac{k(k-1)(k-2) - (k-1)(k-2)(k-3)}{3\cdot 2\cdot 1} = \beta_3 + 1$$

ここまで示せば，後は，同様にやっていけることがわかると思います。上で求めた公式から $M5(\gamma_0) = M5(1) = 1\cdot\beta_1 + 1\cdot\beta_0$ は，すぐわかり，次に，$M5(\gamma_1) = M5(\gamma)$ は，γ を $5\times k + \gamma$ に変えて $\sum$ を取るという処理ですから，

$$\begin{aligned} M5(\gamma_1) = M5(\gamma) &= \sum_{k=0}^{\beta}(5\times k + \gamma) = \sum_{k=0}^{\beta}(5(k-1) + (5+\gamma)) \\ &= 5(\beta_2 - 1) + (5+\gamma_1)(\beta_1 + 1) = 5\cdot\beta_2 + (5+\gamma_1)\cdot\beta_1 + \gamma_1\cdot\beta_0 \end{aligned}$$

ここで，$(5k+\gamma)=5(k-1)+(5+\gamma)$ と変形してから $\sum$ を取った所がポイントです。次に，$M5(\gamma_2)=M5\left(\dfrac{\gamma(\gamma-1)}{2}\right)$ も，γ を $5\times k+\gamma$ に変えて $\sum$ を取る処理ですから

$$M5(\gamma_2)=\sum_{k=0}^{\beta}\frac{(5\times k+\gamma)(5\times k+\gamma-1)}{2}$$

ここで $(5k+\gamma)=5(k-1)+(5+\gamma)$ とみて，$\dfrac{5\times k+\gamma-1}{2}$ をかけるのですが，$5(k-1)\times\dfrac{5(k-2)+(9+\gamma)}{2}+(5+\gamma)\times\dfrac{5(k-1)+(4+\gamma)}{2}$ と変動させながら，かけ算をやるというのが，2ヶ月もかかって見つけたアイデアです。単純ですがなかなか気が付きませんでした。さらに，ここで係数として出てくる γ も同じアイデアで処理します。つまり $(5+\gamma)(4+\gamma)=(5+\gamma_1)(4+\gamma)$ と見て $4+\gamma$ を変動させながらかけると，

$$5\times(4+\gamma)+\gamma_1\times(5+(\gamma-1))=20+5\gamma_1+5\gamma_1+2\gamma_2=20+10\gamma_1+2\gamma_2$$

となります。こういった計算をやると

$$\begin{aligned}M5(\gamma_2)&=25(\beta_3+1)+\frac{5(9+\gamma_1)(\beta_2-1)}{2}+\frac{5(5+\gamma_1)(\beta_2-1)}{2}+\frac{(10+5\gamma_1+\gamma_2)(\beta_1+1)}{2}\\&=25\cdot\beta_3+(35+5\gamma_1)\cdot\beta_2+(10+5\gamma_1+\gamma_2)\cdot\beta_1+\gamma_2\cdot\beta_0\end{aligned}$$

となります。β_3+1 とか，β_2-1 の後ろの $+1$ とか -1 とかの部分を全部まとめたものが，最後の β_0 の係数になります。ただし，その結果は，最初からわかっていて，$M5(\gamma_2)$ なら最後の項は，$\gamma_2\cdot\beta_0$ となります。ようするに $\beta=0$ の場合は，β_3，β_2，β_1 が 0 になってしまうので，$\beta_0=1$ の部分だけ残るということです。

これらの計算を再度係数だけ抜き出し，パスカルの三角形のように処理します。

1		1				
①↓	↘②	③↓	↘④			
5		$5+\gamma_1$		γ_1		
⑤↓	↘⑥	⑦↓	↘⑧	⑨↓	↘⑩	
25		$35+5\gamma_1$		$10+5\gamma_1+\gamma_2$		γ_2

①〜⑩ に入る式は，次のようになり，上の行の数式にかけて 2 つの式をたすことになります。

① $=\dfrac{5}{1}$，③ $=\dfrac{0}{1}$，　② $=\dfrac{\gamma+5}{1}$，④ $=\dfrac{\gamma+0}{1}$，

⑤ $=\dfrac{10}{2}$，⑦ $=\dfrac{5}{2}$，⑨ $=\dfrac{0}{2}$，　⑥ $=\dfrac{\gamma+9}{2}$，⑧ $=\dfrac{\gamma+4}{2}$，⑩ $=\dfrac{\gamma-1}{2}$，

次の行を計算するのに必要な⑪と⑫もすぐ推測できると思います。一応書いておくと，⑪ $=\dfrac{15}{3}$，⑫ $=\dfrac{\gamma+13}{3}$ となり，参考までに，$M5(\gamma_3)$ の場合にも基底 β_4〜β_0 の係数を記述しておくと，125， $25(9+\gamma_1)$， $5(22+7\gamma_1+\gamma_2)$， $(10+10\gamma_1+5\gamma_2+\gamma_3)$， γ_3 となります。

$M2()$ 作用素も同様な計算ができるので，今度は，結果だけ書いておきます。

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & & 1 & & & & & \\
①\downarrow & \searrow② & ③\downarrow & \searrow④ & & & & \\
2 & & 2+\delta_1 & & \delta_1 & & & \text{(注)}\ \delta_2 = 0 \text{ です。} \\
⑤\downarrow & \searrow⑥ & ⑦\downarrow & \searrow⑧ & ⑨\downarrow & \searrow⑩ & & \\
4 & & 5+2\delta_1 & & 1+2\delta_1+\delta_2 & & \delta_2 &
\end{array}
$$

①〜⑩に入る式は，次のようになります。

① $= \dfrac{2}{1}$，③ $= \dfrac{0}{1}$，　　② $= \dfrac{\delta+2}{1}$，④ $= \dfrac{\delta+0}{1}$，

⑤ $= \dfrac{4}{2}$，⑦ $= \dfrac{2}{2}$，⑨ $= \dfrac{0}{2}$，　⑥ $= \dfrac{\delta+3}{2}$，⑧ $= \dfrac{\delta+1}{2}$，⑩ $= \dfrac{\delta-1}{2}$，

$M2()$ 作用素の場合は，δ は，0 か 1 になりますから，必ず $\delta_2 = \dfrac{\delta(\delta-1)}{2} = 0$ となります。それが，$M2(\delta_1) = 2\cdot\gamma_2 + (2+\delta)\cdot\gamma_1 + \delta\cdot\gamma_0$ のように係数の δ に右添え字を付けなかった理由です。ただし $M2(\delta_1)$ の（　）の中の添え字は，別です。（基底は特別）

6 一般的な公式の完成型

今まで β 〜ε のような文字を使って処理してきましたがより一般的な表示のために，左添え字も追加して β 〜ε の変わりの文字として使用することにします。例えば $A_5(n)$ の例なら，$a+5b+10c+50d+100e=n$ の場合，$n = 100\cdot{}_4\alpha + 50\cdot{}_3\alpha + 10\cdot{}_2\alpha + 5\cdot{}_1\alpha + {}_0\alpha$ とすると基底は，先頭の文字 ${}_4\alpha$ に右添え字を付けた ${}_4\alpha_4$，${}_4\alpha_3$，${}_4\alpha_2$，${}_4\alpha_1$，${}_4\alpha_0$ で，$A_5(n)$ は，$A_5(n) =$（ア）$\cdot{}_4\alpha_4 +$（イ）$\cdot{}_4\alpha_3 +$（ウ）$\cdot{}_4\alpha_2 +$（エ）$\cdot{}_4\alpha_1 +$（オ）$\cdot{}_4\alpha_0$ と表示されます。（ア）〜（オ）は，行列の積を計算すると求まります。これらの計算を全体的な図で示しておきます。

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow A_2(n) \text{ の係数}
$$

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ {}_1\alpha+2 & 1 \\ {}_1\alpha & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} 2 \\ {}_1\alpha+3 \\ {}_1\alpha+1 \end{pmatrix} \leftarrow A_3(n) \text{ の係数}
$$

$$
\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 5\cdot{}_2\alpha_1+35 & 5 & 0 \\ {}_2\alpha_2+5\cdot{}_2\alpha_1+10 & {}_2\alpha_1+5 & 1 \\ {}_2\alpha_2 & {}_2\alpha_1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 \\ {}_1\alpha+3 \\ {}_1\alpha+1 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} \leftarrow A_4(n) \text{ の係数}
$$

$$
\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4\cdot{}_3\alpha+12 & 4 & 0 & 0 \\ 5\cdot{}_3\alpha+4 & 2\cdot{}_3\alpha+5 & 2 & 0 \\ {}_3\alpha & 2\cdot{}_3\alpha+1 & {}_3\alpha+2 & 1 \\ 0 & 0 & {}_3\alpha & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} \text{(ア)} \\ \text{(イ)} \\ \text{(ウ)} \\ \text{(エ)} \\ \text{(オ)} \end{pmatrix} \leftarrow A_5(n) \text{ の係数}
$$

（係数行列の注意）奇数番目の ${}_1\alpha$ とか ${}_3\alpha$ には，右添え字がないのは，${}_1\alpha_2 = {}_3\alpha_2 = 0$ のように右添え字が 2 以上だと 0 になってしまうからです。（偶数番目は，右添え字が 5 以上だと 0）ただし，先頭の文字は基底として使用するので，この場合は例外扱いとなります。例えば $A_4(398)$ の場合には，基底が，${}_3\alpha_3$〜${}_3\alpha_0$ で ${}_3\alpha = \mathrm{int}(398/50) = 7$ となりますが。しかし，これが，$A_5(398)$ だと ${}_4\alpha = \mathrm{int}(398/100) = 3$ で，次に，この余りの 98 を 50 で割るので，${}_3\alpha = \mathrm{int}(98/50) = 1$

というように今度は 1 以下になる訳です。右側の（ア）〜（オ）と，${}_4\alpha_4$〜${}_4\alpha_0$ との内積が $A_5(n)$ の最終的な答えになります。

（注） ${}_4\alpha_4 = \dfrac{{}_4\alpha({}_4\alpha-1)({}_4\alpha-2)({}_4\alpha-3)}{4\cdot3\cdot2\cdot1}$ であり，また，${}_4\alpha_0 = 1$ です。

5 節で出てきた $M2()$ 作用素の場合，次のような行列の積の計算がありました。($\delta = {}_1\alpha$ です。)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \delta+2 & 1 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \delta+3 \\ \delta+1 \end{pmatrix}$$

これが，上の図のどこに出てきているのかを見てもらえれば，後は同様に作っていけると思います。最後に，これを，表計算ソフトのエクセル等で計算できるようにしたものを紹介しておきますが，手計算でないなら，$M5()$ 作用素の行列にある，${}_2\alpha_2$ のような形を意識する必要はありません。

つまり，例えば，次の例④にある $M5()$ 作用素の中の 50，5，8 と ${}_2\alpha = 3$ との関係は，$5\times\dfrac{3+9}{2}+8\times\dfrac{5}{2}=50$ となっています。（こう計算するように設定する訳です。）

例④「1 円，5 円，10 円，50 円，100 円玉の 5 種類で，987 円の支払方法は何通りか？」なら，$987 = 100\cdot9+50\cdot1+10\cdot3+5\cdot1+2$ より

${}_4\alpha$	${}_3\alpha$	${}_2\alpha$	${}_1\alpha$	${}_0\alpha$
9	1	3	1	2

行の番号↓	列の番号→	4	3	2	1	行列の積の値	
2						1	
1						1	
3				2		2	
2	$M2()$ の作用素→			3	1	4	
1				1	1	2	
4			25			50	
3	$M5()$ の作用素→		50	5		120	
2			28	8	1	90	
1			3	3	1	20	
5		8				400	←（ア）
4		16	4			1280	←（イ）
3	$M2()$ の作用素→	9	7	2		1470	←（ウ）
2		1	3	3	1	700	←（エ）
1		0	0	1	1	110	←（オ）

（注）行番号と列番号は，普通と逆順に付けています。

行列の積の値も，ずらして表示しているような感じなので注意してください。

${}_4\alpha_4$	${}_4\alpha_3$	${}_4\alpha_2$	${}_4\alpha_1$	${}_4\alpha_0$	最終的答（内積の値）
126	84	36	9	1	217250 通り

$M2()$ 作用素等を表現する行列は，絶対番地等をうまく使えば数式を 1 つ作って後はコピーで処理できます。（一番右列の 1，1 は固定なので，ここから，5 節で紹介したパスカルの三角形

のように作っていくように設定します。）私は987円の部分だけ入力すると後は自動的に全部表示させせるようにしました。こんな説明では，不十分だと思いますが，いろいろな数値がどこから来ているのか推測可能なように書いたつもりです。もっと詳しい説明を希望される方がいらしゃいましたら，勤務先に連絡してください。数式入りのエクセルのシートをコピーして送ります。また，こういった計算法が本または，インターネットで紹介されていましたら教えていただけるとありがたいです。ちなみに私は，変則的な2000円札も含めて10000円札まで処理できるように設定できました。最後に，私の複雑な計算を追跡していただいた，北海道岩見沢農業高校の加藤秀隆先生と京都府立北桑田高校の稲葉芳成先生には，本当に感謝申し上げます。

参考文献

[1] 山本芳彦，「数論入門1」，岩波書店，1996年
この本のp.22に $A_6(500n)$ を求める問題が紹介されています。