

出来得る限りビジュアルに！ 「微分積分」高校と大学の狭間で

八千代松蔭高等学校 中村 明

1 前置き

私，千葉県の公立高校を 38 年間勤務し，3 年前定年退職し，2 年間は東邦大学付属東邦高校で，現在は八千代松蔭高校で数学の非常勤講師をしております中村明と申します。

このたび，千葉大で週 1 回の数学の補習授業を始めましたので，その前期分（内容「微分積分」）の概要を以下のとおり報告します。

（このレポートはその補習授業の反省を踏まえて若干加筆，訂正したもの）

2 第 1 回補習授業出席者 12 名の学生の内訳。

- (1) 学部の内訳は園芸 10 名，法経 1 名，教育 1 名。
- (2) 男女各 6 名。
- (3) 全員推薦入試合格者で高校時代数学 III 履修者 1 名（教育，女子）。
- (4) 出身地域の大半が関西または関西以西。（因みに千葉県出身者は 1 名のみ。）

3 補習授業の目的

千葉大に推薦入試で合格した（意欲はあるが数学の知識の不足している）1 年生に対して，高校の数学を補い，大学の「微分積分学」の補習授業をすることで，結果として大学の「微分積分学」の単位が取れるように援助すること。

4 前期分 10 回の授業内容（1 回の授業時間：規定 60 分：実際平均 70 分）

1 回目の授業

- (1) 高校時代の数学の履修状況の把握（アンケートを実施）
- (2) 中村の自己紹介（ノートパソコン持参で動画，静止画を見せでの自己紹介）
- (3) 剰余の定理，因数定理等。（高校の数学 II の教科書を使い）三角関数の加法定理とその応用の復習。数学 II の微分の復習（3 次，4 次関数のグラフの描き方等）

2 回目の授業

- (1) 積分の復習（数学 II の教科書を使用）

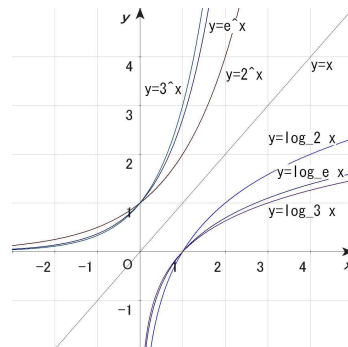
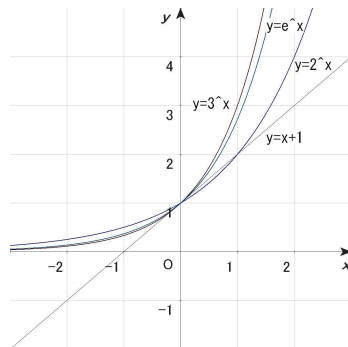
(2) e や e^x の定義 (以下は板書した式等)

指数関数 $y = 2^x$ ① と指数関数 $y = 3^x$ ② の間に特別な関数 $y = e^x$ ③ を考える。

関数 $y = 2^x$ の $x = 0$ における接線の傾きを $m_1 < 1$

関数 $y = 3^x$ の $x = 0$ における接線の傾きを $m_2 > 1$

より関数 $y = e^x$ の $x = 0$ における接線の傾き $m = 1$ となる e を考える。



即ち (底 2 と底 3 の間の数 e を底とする) 関数 $y = e^x$ の $x = 0$ の微分係数を計算する。

$$m = f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{..... ④} \text{ として, } y = e^x \text{ の導関数を求める。}$$

$$\frac{d}{dx} e^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$= e^x \times 1 = e^x \quad (\text{④})$$

(微分しても積分しても変わらない関数 $y = e^x$ がここに登場!) $e \doteq 2.7182$

(3) 自然対数 $y = \log_e x$ について考える。関数 $y = e^x$ の逆関数として $y = \log_e x$ を考えるのが当然であるが, $y = \log_e x$ を考える必要性の説明を強調した。

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ の公式は $n = -1$ では使えないが, $\int \frac{1}{x} dx$ はどんな結果になるのだろうか?

$$(\text{結論}) \int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \log_e x + C$$

(証明)

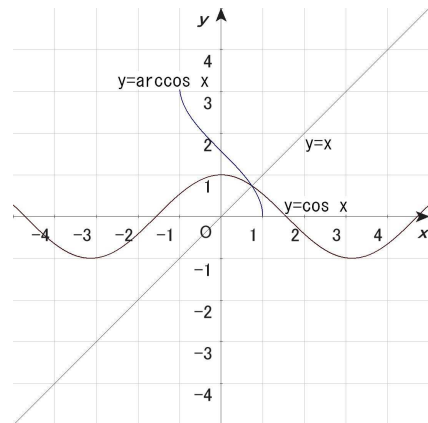
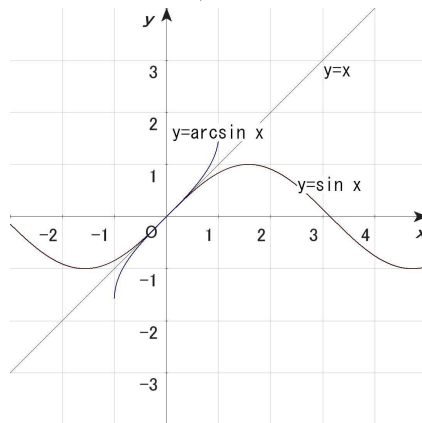
$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\log_e x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e(x+h) - \log_e x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e \frac{x+h}{x}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log_e \left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right) \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log_e \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \\
&= \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

3 回目の授業

(1) 逆三角関数の導入

$y = \sin x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に移動すると $y = \sin^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$) のグラフになることを目で見て理解させた。

まったく同様に $y = \cos x$ のグラフを直線 $y = x$ に関して対称に移動すると $y = \cos^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi$) のグラフと目で見て理解させた。



次に $\sin^{-1} x = \alpha$, $\cos^{-1} x = \beta$ とおくと

$$x = \sin \alpha, x = \cos \beta \quad \text{なので} \quad \sin \alpha = \cos \beta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta, \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{以上より} \quad y = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

(2) 次に逆三角関数の導関数を求める。

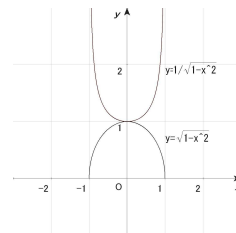
$y = \sin^{-1} x$ とおくと $x = \sin y$

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} (\sin y) \quad \therefore 1 = \frac{d}{dy} (\sin y) \frac{dy}{dx} \quad \therefore 1 = \cos y \times y'$$

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (\text{答}) \text{この式は良く出てくるのでグラフで覚えさせた。}$$

即ち, $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ① のグラフは
 単位円: $x^2 + y^2 = 1$ の上半分の逆数の関数である。

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ ② } \text{ も同様に教えた。}$$



① と ② より $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = 0$ を図形を思い出させながら理解させた。

(3) 各種合成関数の微分, 対数微分法の練習 (ほんの一例)

(例 1) $y = x^3 \log 2x$ を微分せよ。

(解)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^3 \log 2x) &= (x^3)' \log 2x + x^3 (\log 2x)' = 3x^2 \log 2x + x^3 \times \frac{(2x)'}{2x} \\ &= 3x^2 \log 2x + x^3 \times \frac{2}{2x} = x^2(3 \log 2x + 1) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(例 2) $y = (\log x)^{\sin x}$ を微分せよ。

(解) 両辺に対数を取ると

$$\log y = \log((\log x)^{\sin x}) = \sin x \log(\log x)$$

この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\log y) &= \frac{d}{dx}(\sin x \log(\log x)) \\ \frac{d}{dy}(\log y) \frac{dy}{dx} &= \cos x \log(\log x) + \sin x \times \{\log(\log x)\}' \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \cos x \log(\log x) + \sin x \times \frac{\frac{d}{dx} \log x}{\log x} \\ &= \cos x \log(\log x) + \frac{\sin x}{x \log x} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= y \left(\cos x \log(\log x) + \frac{\sin x}{x \log x} \right) \\ &= (\log x)^{\sin x} \left(\cos x \log(\log x) + \frac{\sin x}{x \log x} \right) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

4 回目の授業

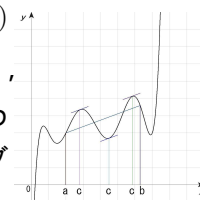
(1) 平均値の定理 (その 1)

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続, 开区間 (a, b) 上

で微分可能ならば $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ ただし,

$a < c < b$ ① となる c が少なくとも一つ

存在する。これについては証明を省略して, グラフを描いて定理の意味を理解させた。



また, テーラー展開, マクローリン展開でパニックにならないように配慮した。

(2) 平均値の定理 (その2)

$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$ ただし, $a < c < b$ ② となる c が少なくとも一つ存在する。これについての説明や概数の求め方の考え方を説明した。

(3) テーラーの定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で, 开区間 (a, b) で n 回微分可能ならば, ある $c (a < c < b)$ が存在して次の式が成立する。

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n$$

$$\text{ただし, } R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \text{ ③ (説明省略)}$$

(4) テーラー展開

関数 $f(x)$ が $x = a$ を含んだ区間で何回でも微分可能と仮定する。

テーラーの定理の $\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n) = 0$ ならば次の式が成立する。

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \text{ ④}$$

(5) 最後がマクローリン展開

関数 $f(x)$ が $x = 0$ を含んだ区間で何回でも微分可能と仮定する。

$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n) = 0$ ならば次の式が成立する。

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \right) \text{ ⑤}$$

(6) マクローリン展開⑤を使った最も有名な公式は暗記させた。

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots \text{ ⑥}$$

⑥の各項を微分すると元の式⑥に等しくなることを確認させた。また, $x=1$ を上の式に代入すると

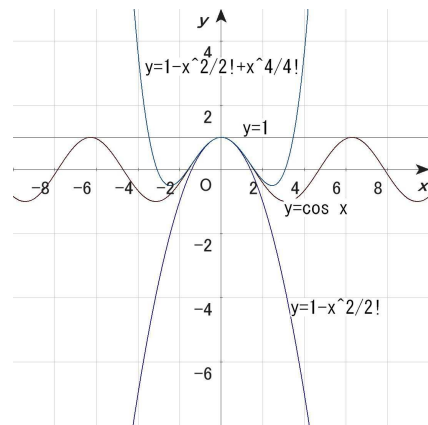
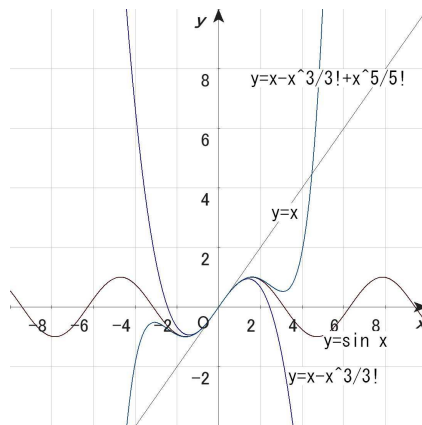
$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \text{ ⑦}$$

さらに, $\sin x$ のマクローリン級数についても, 各項を微分すると $\cos x$ のマクローリン級数に等しくなることを確認させた。

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots \text{ ⑧}$$

⑧の式を各項別に微分すると

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \cdots \text{ ⑨}$$



補習受講生はこの式の展開と関係に感動した。

「このマクローリン展開の⑥，⑧，⑨は関数電卓やコンピュータにプログラムとして組み込まれているので瞬時にその結果が表示される。この式がないとコンピュータは作動しないよ。」「だから，テストの点も必要だが一般教養としてもこの程度の数学は大学生には当然知っていて欲しい知識である。」なんて，無知な中村は偉そうなことを言ってしまった。

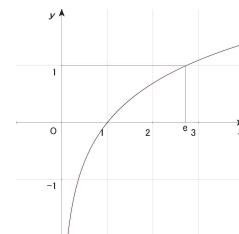
5, 6, 7 回目の授業は主に積分の計算練習（紙面の都合でそのごく一部を紹介）

$$\begin{aligned}
 \text{(例 1)} \quad & \int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x - \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{部分積分}) \\
 & (1-x^2 = t \text{ とおくと, } -2x \, dx = dt) \quad (\text{置換積分}) \\
 & = x \sin^{-1} x - \int \frac{dt}{\sqrt{t}(-2)} = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} \, dt \\
 & = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} + C = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

$$\text{(例 2)} \quad A = \int_1^e \frac{\log x}{x} \, dx \text{ を求めよ。} (\text{置換積分})$$

$$\begin{aligned}
 & (\log x = t \text{ とおくと } \frac{dx}{x} = dt) \\
 & x : 1 \rightarrow e \quad t : 0 \rightarrow 1
 \end{aligned}$$

$$A = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

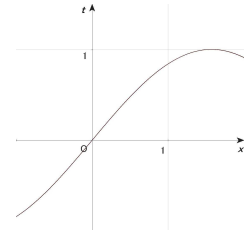


$$\text{(例 3)} \quad A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} \text{ を求めよ。} (\text{置換積分})$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x}$$

$$\begin{aligned} & (\sin x = t \text{ とおくと } \cos x \, dx = dt) \\ x : 0 \rightarrow \frac{\pi}{6} & \quad t : 0 \rightarrow \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2-1} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= -\frac{1}{2} \left[\log|t-1| - \log|t+1| \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log 3 \text{ (答)} \end{aligned}$$



(例 4) $A = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{|x(x-2)|}}$ を求めよ。

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}} + \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{x(x-2)}} \\ &= \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} + \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-1}} \\ &= \left[\sin^{-1}(x-1) \right]_0^2 + \left[\log \left(|x-1| + \sqrt{(x-1)^2-1} \right) \right]_2^4 \\ &= (\sin^{-1} 1 - \sin^{-1}(-1)) + (\log|3 + \sqrt{8}| - \log|1 + \sqrt{1-1}|) \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + (\log|3 + \sqrt{8}| - 0) = \pi + \log(3 + 2\sqrt{2}) \text{ (答)} \end{aligned}$$

(例 5) $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x \sin^2 x dx$ を求めよ。

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x dx \\
 &= \frac{7!!}{8!!} \times \frac{\pi}{2} - \frac{9!!}{10!!} \times \frac{\pi}{2} \quad (\text{公式による}) \\
 &= \frac{7 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 6 \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1}{10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{7 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 6 \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{7}{512} \pi \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

8 回目の授業は主に偏微分と置換積分の計算練習であった。

(偏微分と2重積分は中村の勉強不足のため「お話」と「計算」だけに終わった。)

偏微分の価値: 1 変数だけを変数と見なし, 他の変数は数字と見なす (高校では全く扱わなかった) 一見単純に見える偏微分の世界は解析学では大きな役割を果たすので, 学生は馬鹿にせずに勉強をする必要があると話した。

例えば空間における極値の存在の条件についての大切な定理を2つ紹介。

定理 1 (極値の必要条件): 偏微分可能な $z = f(x, y)$ が点 (a, b) で極値をとるならば

$$f_x(a, b) = 0 \text{ かつ } f_y(a, b) = 0$$

定理 2 (極値の判定法): 偏微分可能な $z = f(x, y)$ が点 (a, b) で極値をとる条件

$f_x(a, b) = 0$ かつ $f_y(a, b) = 0$ かつ $D(a, b) = ((f_{xy}(a, b))^2 - f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b)) < 0$ のとき

(1) $f_{xx}(a, b) > 0$ ならば, $f(x, y)$ は点 (a, b) で極小値をとる。

(2) $f_{xx}(a, b) < 0$ ならば, $f(x, y)$ は点 (a, b) で極大値をとる。

(この (1), (2) は数 III に出てくる 2D の世界の極小, 極大に対応している。)

即ち, (1) $y'' > 0$ (かつ $f'(a) = 0$) のとき y は上に凹 $\rightarrow y$ は $x = a$ で極小値をとる。

(2) $y'' < 0$ (かつ $f'(a) = 0$) のとき y は上に凸 $\rightarrow y$ は $x = a$ で極大値をとる。

例 1 $z = x^2 - xy + y^2 + x - 5y + 1$ の極値を求めよ。

$$z_x = 2x - y + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}, z_y = -x + 2y - 5 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②により, この連立方程式を解くと $(x, y) = (1, 3) \cdots \textcircled{3}$

$$\textcircled{1} \text{より } z_{xx} = 2 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \text{より } z_{yy} = 2 \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より } z_{xy} = -1 = z_{yx} \cdots \textcircled{6}$$

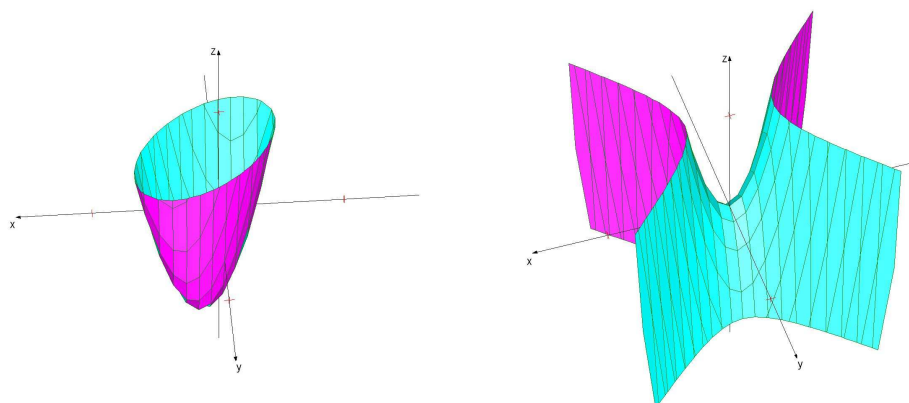
$$D(1, 3) = (z_{xy}(1, 3))^2 - z_{xx}(1, 3)z_{yy}(1, 3) = (-1)^2 - 2 \times 2 = -3 < 0$$

以上と定理 2 より

$$z(1, 3) = 1^2 - 1 \times 3 + 3^2 + 1 - 5 \times 3 + 1 = -6 \text{ は極小値である。}$$

例 2 $z = x^2 - y^2$ (極値を持たない式の例) (紙面の都合で 3D 図だけ紹介)

(注) このレポートに中村が描いた全ての 2D, 3D のグラフ (図形) はフリーソフト「FunctionView」による。



(例1, 例2の考察)

例1: $z = x^2 - xy + y^2 + x - 5y + 1 \cdots \textcircled{1}$ の極値を求める問題は, 問題が x, y に関して2次式であるので, それはちょうど2Dの世界です。その世界では x の2次関数の最小問題は微分を使わないで, 平行移動でも頂点が求められる。そのようにして, $\textcircled{1}$ の最小値(極小値)は偏微分を使わないでも簡単に求めることができる。

別解) $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} z &= x^2 - (y-1)x + (y^2 - 5y + 1) \\ &= \left(x - \frac{y-1}{2}\right)^2 - \frac{y^2 - 2y + 1}{4} + (y^2 - 5y + 1) \\ &= \left(x - \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-3)^2 - 6 \geq 0 + 0 - 6 \geq -6 \end{aligned}$$

(答) x, y は実数より $(x, y) = (1, 3)$ のとき z は最小値-6をとる。

例2: $z = x^2 - y^2$ のグラフは2Dの世界では $z = 0$ のときは2直線を表し, $z \neq 0$ のときは双曲線を表すので, 容易に3Dの世界では馬の鞍の形が想像できる。

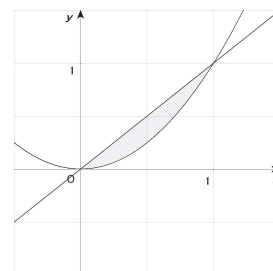
9回目の授業は主に2重積分の計算と置換積分の復習

例1 次の2重積分を求めよ。

$$A = \int \int_D xy^2 dx dy, D: 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x$$

解)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(x \left(\int_{x^2}^x y^2 dy \right) \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^x dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^4 - x^7) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{40} \text{ (答)} \end{aligned}$$



別解)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 y^2 \left(\int_y^{\sqrt{y}} x \, dx \right) dy = \int_0^1 y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^3 - y^4) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{40} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

10 回目の授業 (前期分最後の授業 , テスト直前のため復習と過去問の解答をした。)

5 今後

これで前期分補習授業の報告は一応終わりとし , 後期が始まった時点で学生の意見や感想を参考にきちんとした「反省」をするつもりである。

6 おわりに

- (1) 「 $\alpha - \omega$ 」に投稿する際いつも親切に指導して下さっている県立柏高校の高橋健治先生に心よりお礼を申し上げます。「有難うございました。」
- (2) また , 今回初めて大学で数学を教える機会を与えて下さった先生方にも感謝 , 感謝です。「有難うございました。」
- (3) 最後に「 $\alpha - \omega$ 」の読者の方々へ 今回少し長くなってしまったこのレポートに , 目を通していただき「有難うございました。」今回または以前の小論等に , ご意見やご批判をいただけますと助かります。(E-mail: akirana8133@yahoo.co.jp)

emath コラム

数式中の立体

点の名前など数式中であっても斜体ではなく立体にすべきである .

数式モードの中で文字を立体にするのが AB

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$$