新三角比表　柏西高校数学科発

柏西高等学校　広川　久晴

1　問題

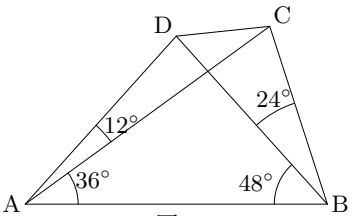

図 1

今春，学検採点終了後のこと，古谷さんが右の問いを提示した。∠ACD を求める問題である。(図 1)

挑戦したのが，藤川・尾形・代崎・和智の数学科の先生方 4 人。補助線を何本か引き解けた様子。

次の問いはないか，との声に第 2 問は私が提示。(図 2) である。有名な問題なのでご存知の方も多いと思われる。今度は古谷さんも挑戦する。

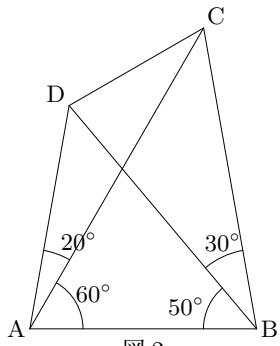

図 2

彼女は何本もの補助線を引き解く。図形の得意な藤川さんはたった 2 本の補助線しか使わない解を見つけた。教務で忙しい斉藤さんは以前より知っていて，C から補助線を引く解法を示した。第 3 問も私が提示。(図 3)

2　計算

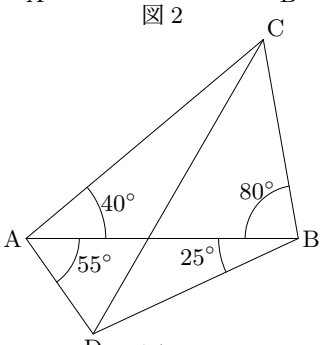

図 3

さて，私は，というと図形的センスがかなり足りないので初めからあきらめの境地。このような人間は座標に埋め込みひたすら計算するしかない。

(図 4) のように座標 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(x,\ y)$ を埋め込むと，C は連立方程式

$$\begin{cases} y = \tan 36^\circ\,(x+1) \\ y = -\tan 72^\circ\,(x-1) \end{cases}$$

の交点なので連立方程式を解いて

$$\mathrm{C}\left(\frac{\tan 72^\circ - \tan 36^\circ}{\tan 72^\circ + \tan 36^\circ},\ \frac{2\tan 36^\circ \tan 72^\circ}{\tan 36^\circ + \tan 72^\circ}\right)$$

ここで 36°, 72° の三角比の値が必要となる。$\theta = 18^\circ$ のとき，$\sin 3\theta = \cos 2\theta$ より $\sin 18^\circ$ などが求まる。多くの本にあるが (表 1) にまとめた。この表を使うと

$$\mathrm{C}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\right)$$ とわかる。

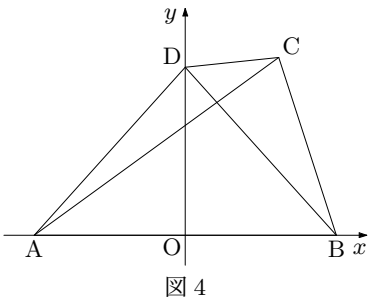

図 4

つぎに D は，$\mathrm{D}(0,\ \tan 48^\circ)$ なので 48° の値が必要となる。∠ACD の最終結果は 30° なので 6° も必要となろう。そうならついでに 6° から 84° まで 6° の倍数すべて求めたい。$6^\circ = 36^\circ - 30^\circ$ などと加

法定理よりも求まる。その結果が (表 2) である。参考書にありそうだが見かけない。計算途中, 二重根号の扱いが面倒なので表の下によく使う計算式をつけておいた。

ここまで準備が整うとあとは楽である。表より

$$\mathrm{D}\left(0,\ \frac{\sqrt{3}\left(3-\sqrt{5}\right)+\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{2}\right)$$

DC の傾きを m とすれば

$$m=\frac{\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}\left(3-\sqrt{5}\right)+\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{2}}{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}-0}$$

(表 2) の下の計算式を使うと，ほどなく

$$m=\frac{-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

となる。表を見れば，これは $\tan 6^\circ$ に等しい。よって $\angle\mathrm{ACD}=30^\circ$。「表を見る」というのに抵抗があれば，この先

$\tan\angle\mathrm{ACD}=\tan(36^\circ-\theta)$ ただし $\tan\theta=m$

を計算し,$\tan\angle\mathrm{ACD}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を導くこともできる。

3 問 2

以前，といってももう 20 年前に計算した。今見直すと冗長であり，この夏新たに計算した。問 1 と同様に座標に埋め込めば，C は連立方程式

$$\begin{cases} y=\tan 60^\circ\,(x+1) \\ y=-\tan 80^\circ\,(x-1) \end{cases}$$

の交点なので連立方程式を解いて

$$\mathrm{C}\left(\frac{\tan 80^\circ-\tan 60^\circ}{\tan 80^\circ+\tan 60^\circ},\ \frac{2\tan 80^\circ\tan 60^\circ}{\tan 80^\circ+\tan 60^\circ}\right),$$

同様に $\mathrm{D}\left(\dfrac{-\tan 80^\circ+\tan 50^\circ}{\tan 80^\circ+\tan 50^\circ},\ \dfrac{2\tan 80^\circ\tan 50^\circ}{\tan 80^\circ+\tan 50^\circ}\right)$

これより DC の傾きを m とすれば

$$m=\frac{\dfrac{2\tan 80^\circ\tan 60^\circ}{\tan 80^\circ+\tan 60^\circ}-\dfrac{2\tan 80^\circ\tan 50^\circ}{\tan 80^\circ+\tan 50^\circ}}{\dfrac{\tan 80^\circ-\tan 60^\circ}{\tan 80^\circ+\tan 60^\circ}-\dfrac{-\tan 80^\circ+\tan 50^\circ}{\tan 80^\circ+\tan 50^\circ}}$$

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ を代入して

$$m=\frac{\tan^2 80^\circ(\sqrt{3}-\tan 50^\circ)}{\tan^2 80^\circ-\sqrt{3}\tan 50^\circ}$$

ここで $\tan 10^\circ=t$ とおき m を t で表す。

$$\tan 80^\circ=\frac{1}{\tan 10^\circ}=\frac{1}{t},\quad \tan 50^\circ=\tan\left(60^\circ-10^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}-t}{1+\sqrt{3}\,t}$$

この 2 つを代入すると

$$m=\frac{t^2\left(\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}-t}{1+\sqrt{3}\,t}\right)}{t^2-\sqrt{3}\,\dfrac{\sqrt{3}-t}{1+\sqrt{3}\,t}}=\frac{4t}{\sqrt{3}t^3-3t^2+\sqrt{3}t+1}$$

これが $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ になるのだが, 直接は無理なので $\tan 3\theta=\dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$ を使って次数を下げる。

$\theta=10^\circ$ とすると $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{3t-t^3}{1-3t^2}$。

これより $\sqrt{3}t^3-3t^2-3\sqrt{3}t+1=0$。これを使えば $m=\dfrac{4t}{4\sqrt{3}t}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle\mathrm{ACD}=60^\circ-30^\circ=30^\circ$ と求まる。

4 10° の表

ここまでやったが 10° の表があればまた別の方法があると思い 10° の表を作ることを考えた。

$\sin 3\theta=3\sin^3\theta-4\sin\theta$ で $\sin 3\theta=\dfrac{1}{2}$ とおけば

$3\theta=30^\circ$, 150°,390°, 510°,750°, 870° より $\theta=10^\circ$,50°, 130°,170°, 250°,290°

なので 1 つの 3 次方程式を解くと 10°, 50°, -70° の 3 つが同時に求まる。

$\sin\theta=x$ とおくと, この 3 次方程式は $3x-4x^3=\dfrac{1}{2}$ より $8x^3-6x+1=0$。

増減表を書くと区間 $[-1,\,1]$ に 3 実解を持つことがわかる。

$x=\sin 10^\circ$, $\sin 50^\circ$, $\sin(-70^\circ)$

なので当然である。

まず x を $\dfrac{1}{2}x$ に置き換えると, $x^3-3x+1=0$。この左辺を $x^3+y^3+z^3-3xyz$ と見比べて

$\begin{cases}y^3+z^3=1\\ yz=1\end{cases}$ を解く。こんな簡単でよいのだろうか。

$y^6-y^3+1=0$ より $y^3=-\omega,-\omega^2$

これより $y=-\omega^{\frac{1}{3}}$, $-\omega^{-\frac{1}{3}}$

あとは $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\left(x+\omega y+\omega^2 z\right)\left(x+\omega^2 y+\omega z\right)$ を使う。これを使えば, 方程式は

$$\left(x-\omega^{\frac{1}{3}}-\omega^{-\frac{1}{3}}\right)\left(x-\omega^{\frac{4}{3}}-\omega^{\frac{5}{3}}\right)\left(x-\omega^{\frac{7}{3}}-\omega^{\frac{2}{3}}\right)=0$$

より $x=\omega^{\frac{1}{3}}+\omega^{-\frac{1}{3}}$, $\omega^{\frac{4}{3}}+\omega^{\frac{5}{3}}$, $\omega^{\frac{7}{3}}+\omega^{\frac{2}{3}}$。

$\omega^{\frac{5}{3}}=\omega^{-\frac{4}{3}}$, $\omega^{\frac{7}{3}}=\omega^{-\frac{2}{3}}$ またこの x をもとの x に戻すと, 最終的に

$$x=\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{1}{3}}+\omega^{-\frac{1}{3}}\right),\ \frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{2}{3}}+\omega^{-\frac{2}{3}}\right),\ \frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{4}{3}}+\omega^{-\frac{4}{3}}\right)$$

が得られた。

そういえば 3 次方程式が 3 実解のとき, その解は虚数で表される, という性質があった。解は

$$\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{1}{3}}+\omega^{-\frac{1}{3}}\right)=\cos 40^\circ=\sin 50^\circ$$

$$\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{2}{3}}+\omega^{-\frac{2}{3}}\right)=\cos 80^\circ=\sin 10^\circ$$

$$\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{4}{3}}+\omega^{-\frac{4}{3}}\right)=\cos 160^\circ=-\sin 70^\circ$$

何のことはない $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$ で表現したのとまったく同じ。

3 次方程式は無意味だった。$\sin 20^\circ$ も無意味とは考えつつも挑戦。先ほどと同様に $y^3=-i\,\omega,-i\,\omega^2$ より解は $x=\frac{1}{2}\left((i\,\omega)^{\frac{5}{3}}+(i\,\omega)^{-\frac{5}{3}}\right)$ などと出るのだが $i=\omega^{\frac{3}{4}}$ なので

$$\frac{1}{2}\left((i\,\omega)^{\frac{5}{3}}+(i\,\omega)^{-\frac{5}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{35}{12}}+\omega^{-\frac{35}{12}}\right)=\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{1}{12}}+\omega^{-\frac{1}{12}}\right)=\cos 10^\circ=\sin 80^\circ$$

ここでも 3 次方程式は無力。ここまでくると意地で $\tan 10^\circ$ に挑戦。先程の tan の 3 倍角の公式より

$$x^3-\sqrt{3}x^2-3x+\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

x^2 を消すために x を $x+\frac{1}{\sqrt{3}}$ と平行移動すると

$$x^3-4x-\frac{8}{3\sqrt{3}}=0$$

また

$$\begin{cases} y^3+z^3=-\dfrac{8}{3\sqrt{3}} \\ -3yz=-4 \end{cases}$$

から $y=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\omega^{\frac{1}{3}}$, $z=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\omega^{-\frac{1}{3}}$ を得る。その結果は (表 3) にまとめた。$\tan 10^\circ$ を見ると

$$\tan 10^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-2\left(\omega^{\frac{2}{3}}+\omega^{-\frac{2}{3}}\right)\right)$$

cos で表せば

$$\tan 10^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-4\cos 80^\circ\right)$$

あまり見かけない。3 次方程式はこう答えを出した。これは,「この等式を証明せよ」でも問題となりそうである。両辺の分母を払って移項した式

$$\sqrt{3}\sin 10^\circ-\cos 10^\circ\left(1-4\cos 80^\circ\right)$$

が 0 になることを示すのは楽だろう。もとの $\tan 10^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-4\cos 80^\circ\right)$ の左辺を右辺に変形するには

$$(\text{左辺})=\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{\sin 10^\circ\left(2\cos 20^\circ-1\right)}{\cos 10^\circ\left(2\cos 20^\circ-1\right)}$$

と変形する。なぜなら分母 $\frac{1}{2}\left(e^{10^\circ\,i}+e^{-10^\circ\,i}\right)$ の有理化は $\left(e^{20^\circ\,i}-1+e^{-20^\circ\,i}\right)$ をかけるからである。

5 まとめ

この先，問 3 で 5° きざみの表をつくるのはあまり意味がないだろう。tan では新しい事実が出てきそうだが $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$ を考えると計算が格段に大変そうである。

以上，図形の問題を体力で解いていたら，3 次方程式と三角比の世界に迷い込んだ私の夏休みを紹介した。

夏休み中，三角比と 3 次方程式の探索から原稿ができた。ただ，県の方針ではこのような原稿を書くことは自宅研修と認められない，とのこと。しかし，部会誌の原稿を自宅で書くことは世間でも認められると思われる。原稿作成が認められれば多少なりとも本部会誌の発展に寄与すると考えられるので今後は配慮が欲しい。

(表 1)　18°

角度	sin	tan
18°	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$
36°	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
54°	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}}$
72°	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$

(表 2)　6°

角度	sin	tan
6°	$\frac{-\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{-\sqrt{3}\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$
12°	$\frac{-\sqrt{3}\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}\left(3-\sqrt{5}\right)-\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{2}$
24°	$\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{-\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)+\sqrt{50+22\sqrt{5}}}{2}$
42°	$\frac{-\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$
48°	$\frac{\sqrt{3}\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}\left(3-\sqrt{5}\right)+\sqrt{50-22\sqrt{5}}}{2}$
66°	$\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$
78°	$\frac{\left(-1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$
84°	$\frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$	$\frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)+\sqrt{50+22\sqrt{5}}}{2}$

そのための計算式

$$\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{50+22\sqrt{5}} \qquad \left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}=4\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$
$$\left(-1+\sqrt{5}\right)\sqrt{5+2\sqrt{5}}=\sqrt{10+2\sqrt{5}} \qquad \left(-1+\sqrt{5}\right)\sqrt{10+2\sqrt{5}}=2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$
$$\left(-1+\sqrt{5}\right)\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{50-22\sqrt{5}} \qquad \left(-1+\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}=4\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$
$$\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$
$$\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}=2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

(表 3)　10°

角度	sin	tan
10°	$\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{2}{3}}+\omega^{-\frac{2}{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-2\left(\omega^{\frac{2}{3}}+\omega^{-\frac{2}{3}}\right)\right)$
20°	$\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{7}{12}}+\omega^{-\frac{7}{12}}\right)$	$\sqrt{3}-2\left(\omega^{\frac{7}{12}}+\omega^{-\frac{7}{12}}\right)$
40°	$\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{5}{12}}+\omega^{-\frac{5}{12}}\right)$	$-\sqrt{3}+2\left(\omega^{\frac{5}{12}}+\omega^{-\frac{5}{12}}\right)$
50°	$\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{1}{3}}+\omega^{-\frac{1}{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-1+2\left(\omega^{\frac{1}{3}}+\omega^{-\frac{1}{3}}\right)\right)$
70°	$-\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{4}{3}}+\omega^{-\frac{4}{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-2\left(\omega^{\frac{4}{3}}+\omega^{-\frac{4}{3}}\right)\right)$
80°	$\frac{1}{2}\left(\omega^{\frac{1}{12}}+\omega^{-\frac{1}{12}}\right)$	$\sqrt{3}+2\left(\omega^{\frac{1}{12}}+\omega^{-\frac{1}{12}}\right)$

emath コラム

不等号

LaTeX を使っていて気になるのが、不等号。いくら $\leq$ が LaTeX 標準とはいえ、教科書と違う記号を使うのは問題もある。

`\geqq` `\leqq` は特に emath というわけではないが、日本の学校教育で使われる等号つき不等号を出力する.

$$2x-3 \geqq 4$$

$$x^2-2x-3 \leqq 0$$

といった具合である。