

ユークリッドの互除法

柏陵高等学校 氏家 悟

あらすじ

昨年 11 月に本校で行われた中学生対象の学校公開における模擬授業で、ユークリッドの互除法を取り上げた。

ユークリッドの互除法は、きわめて強力なツールであるにもかかわらず、ほとんど知らぬまま学校教育を終えてしまう人が多いことがとてももったいないことであると感じていた。

せっかくの模擬授業，それも教科書の束縛を受けない時間なので，ユークリッドの互除法による約分を中学生に教えてみた。

1 はじめに

普段，約分を行うとき，どのような手順で行っているだろうか。

生徒が黒板で問題を解いているときの様子を見ると，当然のことながら，

「2 で割って，割れなくなったら 3 で割って・・・」

という手順で行うのが普通であろう。いわゆる分母分子を同時に割っていくという手順である。

ある日の，「場合の数」の授業で，生徒がかなり大き目の分母分子の既約分数について，それ以上約分できるかどうか悩んでいた。そのとき思わず「引けばわかる」と口走ってしまった。当然，生徒は何のことやらわからない。

2 約分は引き算

いつも引き算で因数を見つけている自分は，「約分は引けばいい」と思っているので，

「引いた数で割れなければ，約分できない。」

と説明してしまったが，理屈はともかく，きちんと手順を説明しなければならないと感じて，授業の中で引き算で約分する方法を教えた。

つまりユークリッドの互除法そのものである。ユークリッドの互除法は最大公約数を求める手順であるため，約分に使うということはあまりしない。特に学校教育で出てくるような約分では，2,3,5,7 で割れるものがほとんどで，ユークリッドの互除法は不要である。しかし，確率の問題などでは大きめの分数が出てきて既約かどうかを確かめるときにはとても便利である。

われわれ数学教師は 100 以下の素数はだいたい頭に入っていて、 $91 = 7 \cdot 13$ とか $111 = 3 \cdot 37$ などといったことはなんとなく知っているが、生徒にとっては、 $\frac{91}{85}$ 程度でも一瞬で見抜くことは出来ず素因数分解を試みようとして挫折し、質問する。

3 学校公開日

模擬授業のタイトルを 1 週間前には係に伝えなければならなかったのだが、やることをまったく決めていなかったため、できるだけ生徒が集まらないように、いかにもつまらなさそうなタイトル「式と計算」にした。何も思いつかなければ、ひたすら式の展開でもさせて、パスカルの三角形にでもつなげようと思っていた。あるいは、パスカルの三角形の塗り絵でもさせ、フラクタル図形でも描かせようかなどと考えていた。

内容を「約分」に決めたのは、たまたまその週の授業で「引き算で約分」を扱ったためであった。ところが当日、「数学」というだけで集まった生徒がなんと 16 人も！（かわいそうに）

タイトルを見て「式と計算って何をやるのかな？」と思った中学生には迷惑な話で、50 分間、ひたすら約分をさせた。

4 教材

まずは、暗算や簡単な手計算で約分ができるタイプ。

プリント 1

- | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| 1. $\frac{2}{6}$ | 2. $\frac{15}{5}$ | 3. $\frac{18}{15}$ | 4. $\frac{16}{12}$ | 5. $\frac{24}{30}$ |
| 6. $\frac{18}{14}$ | 7. $\frac{22}{12}$ | 8. $\frac{38}{16}$ | 9. $\frac{24}{42}$ | 10. $\frac{72}{48}$ |

つづいて、ちょっと計算が大変なタイプ。

プリント 2

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|-----------------------|
| 1. $\frac{360}{378}$ | 2. $\frac{108}{252}$ | 3. $\frac{720}{324}$ | 4. $\frac{84}{294}$ | 5. $\frac{308}{364}$ |
| 6. $\frac{26}{39}$ | 7. $\frac{65}{78}$ | 8. $\frac{66}{78}$ | 9. $\frac{85}{102}$ | 10. $\frac{154}{182}$ |

$\frac{85}{102}$ では $85 = 5 \cdot 17$ をすぐに気づくうえ、102 は 1 位が 0, 5 でないため、102 を 17 で割ってみるという手順になるかと思う。

さらに、割り算の回数がやたら多くなるタイプ。携帯電話の電卓機能を使ってよいことにする。

プリント 3

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 1. $\frac{162}{144}$ | 2. $\frac{132}{252}$ | 3. $\frac{84}{198}$ | 4. $\frac{264}{234}$ | 5. $\frac{378}{336}$ |
| 6. $\frac{168}{504}$ | 7. $\frac{264}{216}$ | 8. $\frac{648}{432}$ | 9. $\frac{396}{468}$ | 10. $\frac{204}{156}$ |

$\frac{648}{432}$ では、最大公約数が 216。これは 2 と 3 で 3 回ずつ割らなければならない。

今度は、公約数の素数が大きめで、割り算をするのが苦しいタイプ。

プリント 4

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 1. $\frac{294}{462}$ | 2. $\frac{297}{117}$ | 3. $\frac{594}{351}$ | 4. $\frac{198}{693}$ | 5. $\frac{273}{231}$ |
| 6. $\frac{455}{364}$ | 7. $\frac{429}{572}$ | 8. $\frac{77}{91}$ | 9. $\frac{91}{143}$ | 10. $\frac{637}{539}$ |

5 ユークリッドの互除法

ここで、ユークリッドの互除法を教える。もちろん「ユークリッドの互除法」という言葉は出さない。「引き算をしよう」である。

もう一度プリント 1 に戻り、

- $\frac{16}{12}$ は $16 - 12 = 4$ で分母分子が割れる。
- $\frac{24}{30}$ は $30 - 24 = 6$ で分母分子が割れる。
- $\frac{18}{14}$ は $18 - 14 = 4$ では割れないので、 $14 - 4 - 4 - 4 = 2$ で分母分子が割れる。
- $\frac{22}{12}$ は $22 - 12 = 10$ では割れないので、 $12 - 10 = 2$ で分母分子が割れる。さらに、約分の結果の $\frac{11}{6}$ は $11 - 6 = 5$ では割れないので、 $6 - 5 = 1$ で分母分子が割れる。つまり 1 でしか割れないからこれ以上約分できないことがわかる。

これをプリント 2,3,4 でも同じ方法でやらせる。

プリント 4 の $\frac{429}{572}$ を普通に割り算した場合、2,3,5,7 で割れず、11 で $\frac{39}{52}$ とできたことだけで安心してしまう可能性はある。

$$572 - 429 = 143, \quad 429 - 143 - 143 - 143 = 0$$

で 143 で割れることがわかる。

また、場合の数などでときどき、既約かどうか質問される $\frac{119}{143}$ のような分数も、

$$143 - 119 = 24, \quad 119 - 24 * 4 = 23, \quad 24 - 23 = 1$$

より既約であることがわかる。

ユークリッドの互除法をプリント 1～4 で練習した後、とても普通ではあきらめる約分をやらせて、模擬授業を終了した。

プリント 5

- | | | | | |
|----------------------------|------------------------------|------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1. $\frac{4301}{3553}$ | 2. $\frac{5083}{4199}$ | 3. $\frac{5491}{6647}$ | 4. $\frac{11033}{17051}$ | 5. $\frac{47141}{19411}$ |
| 6. $\frac{107113}{115197}$ | 7. $\frac{3960091}{3968039}$ | | | |

とくに最後の $\frac{3960091}{3968039}$ は電卓を使っても数分で素因数分解することは不可能である。

$$3968039 - 3960091 = 7948, \quad 3960091 - 7948 * 498 = 1987, \quad 7948 - 1987 * 4 = 0$$

より分母分子は 1987 で割れて $\frac{1993}{1997}$ 。

1987, 1993, 1997 いずれも素数である。3960091 を順に 1 の位が 5 でない奇数で順番に割り続けて 1987 にたどり着くには 500 回近い割り算が必要になる。プログラムを組めばわけは無いが、手作業で 5 秒に 1 回割り算をしても、50 分くらいかかることになる。

6 素因数分解と最大公約数

約分を話題にしたのは、これが最もご利益がありそうだからである。実際は最大公約数を求めているので、説明をしているときに、求めた数が最大公約数であることも教えた。

ユークリッドの互除法は簡単に 2 数の最大公約数を求める手順であるが、学校では教わらない。教わるのは、大学の整数論だろうか。整数論では、他にもいろいろ理論的なことに使い、その点でも強力なツールになる。

普通割り算は、電卓などで小数 $3960091 \div 3968039 = 0.9979969$ がわかればじゅうぶんであるし、数学の問題で巨大な分数を約分することはまずないから、学校では教えないのだと思う。

素因数分解を知っていれば十分という考えである。

しかし小さい数でも知っているスピードがぜんぜん違うし、既約かどうかを見極めるにはこれほど手軽なものはない。プリント 1～4 で実際に比べることによって、参加した生徒にはちょっと得した気分になって帰ってもらった。

時間があれば、最大公約数を方眼紙などで遊ばせて、引き算の繰り返しを体験してもらいたいところだが、時間は 50 分、約分の計算だけに絞った。

7 おわりに

模擬授業では中学生 16 人のほかに母親 7 人も参加していて、プリントも配布し実習してもらった。

ほとんどすべての大人は、約分や最大公約数では「素因数分解をしなければならぬ」と思っている。コンピュータの世界で、暗号技術は 1 つの数の素因数分解が難しいことを使っているこ

とはよく知られているが、2数の最大公約数を求める手順は（ユークリッドの互除法によって）きわめて優しいことはあまり知られていない。それは、ユークリッドの互除法の社会的認知度が低いからだろうと思う。つまり、分母分子が巨大整数の場合でも、約分できるかどうかは手軽にわかるはずなのであるが、素因数分解に目が行ってしまったため、「既約の判断は難しい、できない」と思う人が多いようである。

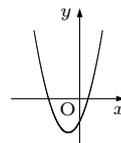
実際、数十桁の数の素因数分解、たとえば
49461452598938785494314994799599149312722195048706571288833609737846761389207
の素因数分解は、Mathematica を使っても 30 分以上機械が止まったのであきらめたが、
49461452598938785494314994799599149312722195048706571288833609737846761389207 と
51563219734746742542718349822659719885743944234989846041303683354097028855491
の最大公約数は一瞬にして 184006271650631966286938034234608785633（素数）が求まる。実際、必要な Mod 計算の回数を確認したら、たった 73 回であった。一瞬にして Mathematica で求まる所以である。

数学マニアだけでなく、もう少し認知度が上がってほしい計算技術である。

emath コラム

図の回り込み

1. \LaTeX の図の周囲へのテキストの回りこみは、リスト環境の中では使用出来ない。
2. そこで、`mawarikomi` 環境。



```
\begin{enumerate}
\item
\begin{mawarikomi}{3cm}{%
{\unitlength3mm
\begin{zahyou}(-3,2)(-2,4)%
\Gurafu{2,2,-1}{-2}{1}
\end{zahyou}%
}
}
```

```
\LaTeX の図の周囲へのテキストの回りこみは、
リスト環境の中では使用出来ない。
\end{mawarikomi}
\item
そこで、\verb|mawarikomi|環境。
\end{enumerate}
```