点と直線の距離の公式 $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ，証明どうしていますか

柏西高等学校　藤川 清，広川 久晴

1　きっかけ

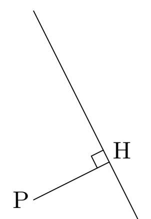
廊下を歩きながら

広 ： 点と直線の距離の公式，証明した？
藤 ： きちんとやりたいんだが, かなり省略した。
広 ： 私は天下りで公式を紹介した。演習で公式に代入させ，成り立っているのを確かめておしまい。証明するならば交点の座標を求めるのが論理としては分かりやすいだろう。

準備室に戻って

藤 ： 右図で垂線の足を $\mathrm{H}(x_1, y_1)$ とおくと，H は，直線 $ax+by+c=0$ に垂直で点 P を通る直線と，もとの直線の交点である。よって $a \neq 0$ のとき，以下の連立方程式となる。

$$\begin{cases} ax_1+by_1+c=0 \\ y_1-y_0=\dfrac{b}{a}(x_1-x_0) \end{cases}$$



これを解けば

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b^2x_0-aby_0-ac}{a^2+b^2} \\ y_1=\dfrac{a^2y_0-abx_0-bc}{a^2+b^2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。これを 2 点間の距離の公式 $d=\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2}$ に代入する。

$$d=\sqrt{\left(x_0-\frac{b^2\,x_0-ab\,y_0-ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y_0-\frac{a^2\,y_0-ab\,x_0-bc}{a^2+b^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2(ax_0+by_0+c)^2+b^2(ax_0+by_0+c)^2}{(a^2+b^2)^2}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

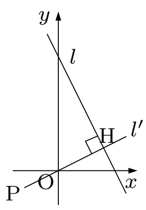
以上を今後，証明〔a 型〕とよぶ。
広 ： でもこれを黒板に書くとなると大変でしょう。
藤 ： そうだな，途中省略しないと一度全面に書いた板書を消して 2 回目にはなるだろう。
広 ： それじゃあ誰も写せない。何か楽な証明はないものか。教科書ではどうなっているのか調べてみよう。

2　各教科書での扱い

数研出版	数学 II 新編数学 II 高校の数学 II	〔p 型〕 平行移動で原点との距離に帰着させている。 〔p 型〕 この方法は数研出版のみ 記述なし
知研出版	新数学 II	コラム欄で，原点と $2x+3y+4=0$ との距離から，証明なしで原点との距離の公式を提示。一般公式は記述ない。
啓林館	数学 II 新編数学 II	〔k 型〕 $(x_0,\ y_0)$ と $2x+3y-6=0$ との距離から，証明なしで公式を提示。
実教出版	数学 II 新編数学 II	〔k 型〕途中式で絶対値を使用，$\mathrm{PH}=\sqrt{a^2+b^2}\,\lvert k\rvert$。 $(x_0,\ y_0)$ と $x-2y+3=0$ との距離から，証明なしで公式を提示。
東京書籍	数学 II 新編数学 II	〔k 型〕 $(x_0,\ y_0)$ と $2x+3y-12=0$ との距離から，証明なしで公式を提示。
第一学習社	数学 II 新編数学 II	〔k 型〕 原点と $y=-2x+5$ との距離を計算。公式の提示はない。
旺文社	数学 II 新編数学 II	〔k' 型〕垂直な直線の方程式を求めている。 〔k' 型〕k を先に求め，後で PH^2 を求めている。

数学 B では，数研出版のみ研究欄で，ベクトルの内積を使って証明している〔v 型〕。
以下，教科書の証明を紹介する。

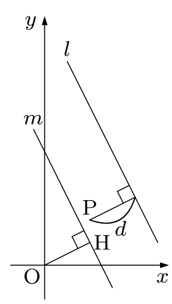
〔p 型〕証明 直線 $l : ax+by+c=0$ に直交し原点を通る直線 l' の方程式は $bx-ay=0$ である。



l と l' の交点を $\mathrm{H}\,(x_1,\ y_1)$ とすれば連立方程式を解いて，

$$x_1=-\frac{ac}{a^2+b^2}\ ,\quad y_1=-\frac{bc}{a^2+b^2}$$

$$\mathrm{OH}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



一般に，点 $\mathrm{P}\,(x_0,\ y_0)$ と $l : ax+by+c=0$ の距離 d とする。
点 P と直線 l を x 軸方向に $-x_0$，y 軸方向に $-y_0$ 平行移動すれば，
点 P は原点 O，直線 l は直線 m に移る。
直線 m の方程式は平行移動の公式より

$$a\,(x+x_0)+b\,(y+y_0)+c=0$$

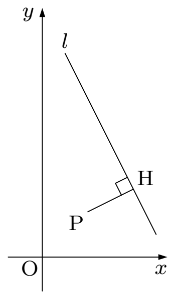
$$ax+by+(ax_0+by_0+c)=0$$

点 P と直線 l の距離は，原点 O と直線 m の距離に等しい。よって

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

が得られる。

〔k 型〕証明 点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から $l: ax+by+c=0$ に垂線を引き，その交点を $\mathrm{H}(x_1,\ y_1)$ とする。



l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$，PH の傾きは $\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

$l \perp \mathrm{PH}$ より

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\left(-\frac{a}{b}\right)=-1$$

よって

$$\frac{x_1-x_0}{a}=\frac{y_1-y_0}{b}$$

この値を k とおけば $x_1-x_0=ak$, $y_1-y_0=bk$,

$\mathrm{PH}^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=\left(a^2+b^2\right)k^2$

$\mathrm{H}(x_1,\ y_1)$ は l 上の点だから $ax_1+by_1+c=0$

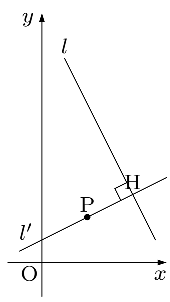
これに $x_1=x_0+ak$，$y_1=y_0+bk$ を代入して $a\,(x_0+ak)+b\,(y_0+bk)+c=0$

$$\therefore\quad k=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

$$\mathrm{PH}^2=\left(a^2+b^2\right)\left(-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2+b^2}$$

$$d=\mathrm{PH}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ■

〔k' 型〕証明 直線 $l: ax+by+c=0$ に垂直で点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を通る直線を l' とし，l と l' の交点を $\mathrm{H}(x_1,\ y_1)$ とする。



l の傾きが $-\dfrac{a}{b}$ より，l' の傾きは $\dfrac{b}{a}$

$$\therefore\quad l': y-y_0=\frac{b}{a}\,(x-x_0)$$

H は l' 上の点だから

$$y_1-y_0=\frac{b}{a}\,(x_1-x_0)$$

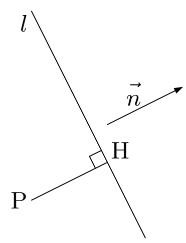
$x_1-x_0=ak$ とおけば $y_1-y_0=bk$ となる。

以下〔k 型〕に同じ。

〔v 型〕証明

右図で，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ の大きさは $\left|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right|$ で表される。

$$\overrightarrow{\mathrm{HP}}=(x_0-x_1\ ,\ y_0-y_1)$$



また，$\vec{n}=(a,b)$ とすると，$\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ はともに直線 l に垂直なので，$\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ である。
よって

$$\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right|=\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right|$$

したがって

$$d=\left|\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right|=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{|\,a\,(x_0-x_1)+b\,(y_0-y_1)\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|\,ax_0+by_0-(ax_1+by_1)\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ここで，点 H は直線 l 上の点なので $ax_1+by_1+c=0$
よって $c=-\left(ax_1+by_1\right)$
ゆえに

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

■

3　その評価

広： きちんと証明がある教科書は，数研出版以外はみな k を使っている。
藤： これは ① の式を変形すると

$$x_1=\frac{b^2x_0-ab\ y_0-ac}{a^2+b^2}=\frac{a^2x_0+b^2x_0-a^2x_0-ab\ y_0-ac}{a^2+b^2}=x_0-a\times\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

同様に

$$y_1=y_0-b\times\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

となる。ここで右の部分に $-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$ が x_1，y_1 に共通して出てくるので k とおいて式変形を楽にしただけである。
広： 数研出版は k を使わずに平行移動を使っている。
藤： k を使っても $x_1-x_0=ak$ なので平行移動という言葉は使わないものの，式変形の上では平行移動を使っているといえる。
広： 生徒にはどちらも分かりづらいだろう。分かりづらいといえばベクトルを使った〔v 型〕だ。計算量は最も少なくエレガントな証明だが，数学 B のベクトルを履修していない生徒にはまったく分からないだろう。内積を使わないとすれば平行移動は避けられない。我々が証明するとしたらどんなのがいいだろうか。
藤： 今の教育課程では座標軸の平行移動を扱わないので，平行移動が使いづらい。

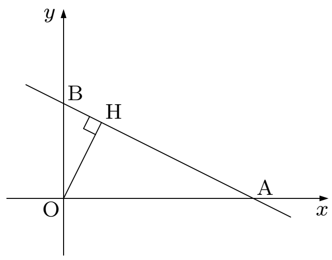
広 ： 絶対値が出てくるのもこの公式が扱いづらい原因である。
藤 ： さらに $\sqrt{a^2+b^2}$ も出てくる。
広 ： でも $a=\sin\theta$, $b=\cos\theta$ とおけば分母は消える。
藤 ： $x\cos\alpha+y\sin\alpha=d$ はヘッセの標準形と呼ばれている。これを使って証明してみよう。

4 私たちの証明

補題： 直線 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ と原点 $\mathrm{O}\,(0,\ 0)$ との距離は $|p|$。

補題の証明 直線と x 軸 , y 軸との交点を A，B とおくと

$$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{p}{\sin\alpha}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{p}{\cos\alpha},\ 0\right)$$



である。原点より直線に垂線 OH を引くと，
$\triangle\mathrm{OAB}\backsim\triangle\mathrm{HOB}$ より $\mathrm{OA}:\mathrm{AB}=\mathrm{HO}:\mathrm{OB}$

これより

$$d=\mathrm{OH}=\frac{\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}}{\mathrm{AB}}=\frac{\left|\dfrac{p}{\cos\alpha}\right|\times\left|\dfrac{p}{\sin\alpha}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{p}{\cos\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{p}{\sin\alpha}\right)^2}}=\frac{\dfrac{|p|^2}{|\cos\alpha\sin\alpha|}}{\sqrt{\dfrac{p^2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}}}=|p|$$

■

補題の逆： 原点からの垂直距離が d，その垂線と x 軸の正方向となす角が α である直線は $x\cos\alpha+y\sin\alpha=d$ で与えられる。

自明なので証明略

公式の証明その 1 〔h 型〕

直線 $ax+by+c=0$ と点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ を，x 軸方向に $-x_0$，y 軸方向に $-y_0$ だけ平行移動すると直線は $a\,(x+x_0)+b\,(y+y_0)+c=0$ であり，点 P は原点 O に移るのでこの距離を求める。

$a\,(x+x_0)+b\,(y+y_0)+c=0$ より $ax+by=-\,(ax_0+by_0+c)$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ y=-\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

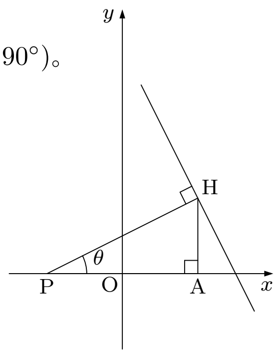
$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=-\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

補題より

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

■

公式の証明その 2 〔y 型〕 （内積の証明を第 2 余弦定理を使って図形的に解説）



右図で $a>0$, $b>0$ とする。
また，垂線PHが x 軸の正の向きとなす角を θ とする ($0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$)。
△APH で第 2 余弦定理を使えば
$\mathrm{PH}=\mathrm{AP}\cos\theta+AH\cos(90^\circ-\theta)$
$=(x_1-x_0)\cos\theta+(y_1-y_0)\sin\theta$ PH の傾きは $\dfrac{b}{a}$ だから
$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$.

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\theta=\cos\theta\cdot\tan\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

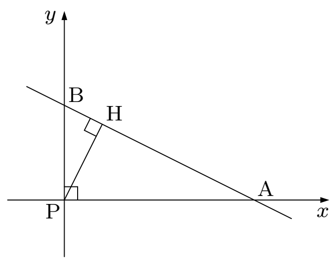
よって

$$\mathrm{PH}=(x_1-x_0)\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+(y_1-y_0)\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

以下〔v 型〕に戻る。 この図での証明おしまい ■

分子の絶対値がないのはこの図で考えているからである。一般には x_1-x_0，y_1-y_0，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の符号が都合よくかみあっているのだが，生徒に説明するのはとても困難である。図を使うなら次の証明がよい。

公式の証明その 3 〔t 型〕



直線 $ax+by+c=0$ と $y=y_0$, $x=x_0$ の交点は,
$\mathrm{A}\left(\dfrac{-by_0-c}{a},\ y_0\right)$，$\mathrm{B}\left(x_0,\ \dfrac{-ax_0-c}{b}\right)$。これから

$$\mathrm{PA}=\left|\frac{-by_0-c}{a}-x_0\right|=\left|\frac{-ax_0-by_0-c}{a}\right|,$$

$$\mathrm{PB}=\left|y_0-\frac{-ax_0-c}{b}\right|=\left|\frac{ax_0+by_0+c}{b}\right|$$

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(x_0-\frac{-by_0-c}{a}\right)^2+\left(\frac{-ax_0-c}{b}-y_0\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}|ax_0+by_0+c|}{|ab|}$$

ここで △PAB ∽ △HPB より $\mathrm{PA}:\mathrm{AB}=\mathrm{HP}:\mathrm{PB}$

$$d=\mathrm{PH}=\frac{\mathrm{PA}\times\mathrm{PB}}{\mathrm{AB}}$$

に代入すると

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|^2}{|ab|}\times\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}|ax_0+by_0+c|}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ■

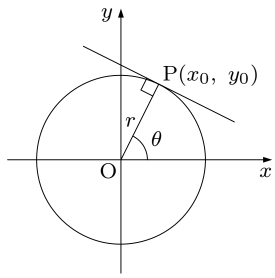
5　円の接線の公式との関係

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は $x_0x+y_0y=r^2$ これを r で割れば

$$x\frac{x_0}{r}+y\frac{y_0}{r}=r$$

明らかに

$$\frac{x_0}{r}=\cos\theta, \frac{y_0}{r}=\sin\theta$$



なので

$$\therefore\quad x\cos\theta+y\sin\theta=r$$

アレ！ヘッセの標準形がでてきた。

6　まとめ

広： 教科書によってこれほど扱いが異なる単元は珍しい。どの会社も扱いに苦慮していることが伺える。
証明方法を概観すると，原点からの距離を平行移動するのが〔p 型〕〔h 型〕，式の上で技巧を凝らすのが〔k 型〕〔k' 型〕，内積を使うのが〔v 型〕でもっとも簡潔。図を使うのが〔y 型〕〔t 型〕。こう考えると最も理解しやすいのは愚直な〔a 型〕かもしれない。また，インターネットで調べると別な証明が見つかった。ここに紹介しないが使い道がある公式なだけに証明方法も多いのかもしれない。

藤： 証明その 2〔y 型〕は都合のよい図で示したが，正・負の場合分けが多くなる。我々の目標の生徒に理解される証明にはなっていないので，証明としては使えない。また,〔p 型〕〔v 型〕以外は $ab=0$ の場合に言及する必要があるが，教科書には遺漏なく入っている。

広： 最後まで場合分けや符号・絶対値に悩まされたが，その難しさはこの証明が難しいことの本質なんだろうな。