

二等辺三角形から思いついたこと

安房水産高等学校 小滝 真人

1 はじめに

ある二等辺三角形の頂点から垂線を対辺に引いたところ、きれいな比の値になったので、それをこの場所を少し借りて述べてみたいと思います。

二等辺三角形については「2 辺の長さが等しい、2 つの角の大きさが等しい」は基本事項です。そして、面積や比の値などを様々な方法で示すことができます。ここでは、

「 $\triangle ABC$ において、 $AB = AC = \sqrt{10}$, $BC = 2\sqrt{2}$ とする。」

として示していきます。まず、

2 $\triangle ABC$ の面積

(ア) 図 1-1 において

A から BC に下ろした垂線の足を D とする。

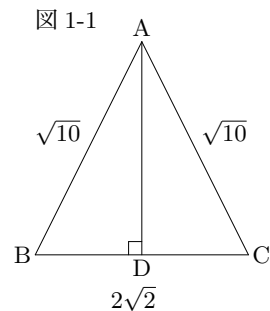
$\triangle ABD$ は直角三角形で、

$BD = DC$ だから $BD = \sqrt{2}$

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (\sqrt{10})^2 - (\sqrt{2})^2 = 10 - 2 = 8$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$



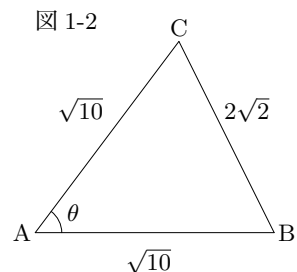
(イ) 図 1-2 において

$\angle BAC = \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 - (2\sqrt{2})^2}{2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{10}} \\ &= \frac{10 + 10 - 8}{2 \times 10} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{よって } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{4}{5} = 4$$



3 比の値

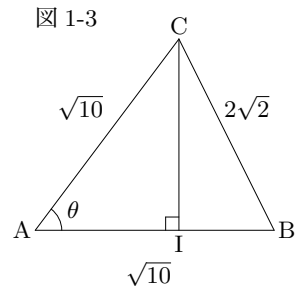
(ウ) 図 1-3 において,

C から AB に下ろした垂線の足を I とする。

$$AI = \sqrt{10} \times \cos \theta = \sqrt{10} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$$

$$\text{だから } IB = \sqrt{10} - \frac{3}{5}\sqrt{10} = \frac{2}{5}\sqrt{10}$$

$$\text{よって } AI : IB = \frac{3}{5}\sqrt{10} : \frac{2}{5}\sqrt{10} = 3 : 2$$



三角比の値から比の値を表しましたが、図 1-4 を用いて方程式だけで比の値を求めると、次のようになります。

(エ) C から AB に下ろした垂線の足を I とする。

ここで、 $AI = x$, $CI = y$ とおくと、 $IB = \sqrt{10} - x$ で、

$\triangle AIC$, $\triangle BIC$ は直角三角形だから

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & \dots \textcircled{1} \\ (\sqrt{10} - x)^2 + y^2 = 8 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

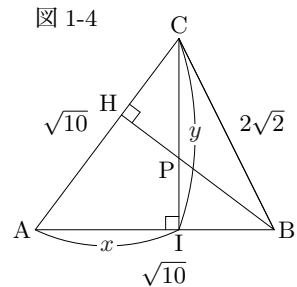
$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より } x = \frac{3}{5}\sqrt{10}$$

$$\text{よって } AI = \frac{3}{5}\sqrt{10}, \quad IB = \frac{2}{5}\sqrt{10}$$

$$\therefore AI : IB = 3 : 2$$

$$\text{また, } \textcircled{1} \text{より } y^2 = 10 - x^2 = 10 - \frac{18}{5} = \frac{32}{5}$$

$$\therefore y = \frac{4}{5}\sqrt{10}$$



さらに、B から AC に下ろした垂線の足を H、線分 CI と BH の交点を P とする。

ここで、 $PI = PH = a$ とおくと、 $PC = PB = \frac{4}{5}\sqrt{10} - a$ で

$$\triangle BIP \text{ は直角三角形だから } \left(\frac{2}{5}\sqrt{10}\right)^2 + a^2 = \left(\frac{4}{5}\sqrt{10} - a\right)^2$$

$$\text{これを解くと } a = \frac{3}{10}\sqrt{10}$$

$$\text{よって } PI = \frac{3}{10}\sqrt{10}, \quad PC = \frac{4}{5}\sqrt{10} - \frac{3}{10}\sqrt{10} = \frac{5}{10}\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\therefore IP : PC = \frac{3}{10}\sqrt{10} : \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3}{10}\sqrt{10} : \frac{5}{10}\sqrt{10} = 3 : 5$$