

不思議な微分 $(\Sigma k^3)' = 3\Sigma k^2$ と $\Sigma k^3 = (\Sigma k)^2$ の拡張

柏陵高等学校 西川 誠

Σk^2 と Σk^3 の公式を見ていると、積分と関係がありそうだなと思ったりしますが、直接積分を利用して Σk^4 などの公式を求めている本は、あまり見かけたことがありません。差分・和分の公式から導いてくるものが、ほとんどのような気がします。このレポートでは、まず積分を使って公式を作る方法を述べて、次に Σk と Σk^3 との関係式 $\Sigma k^3 = (\Sigma k)^2$ を詳しく調べることで、さらに新しい関係式を発見する方法、及び**不思議な微分** $(\Sigma k^3)' = 3\Sigma k^2$ について述べてみたいと思います。

このレポートに出てくる Σ は、ほとんど $\sum_{k=0}^n$ の $k=0$ から n が省略されたものとします。ただし $\Sigma 1 = n$ の場合は、 $k=1$ からと考えて下さい。それ以外の場合は、 $k=0$ のとき 0 になる数列の和しか扱っていないので、 $k=1$ からでも $k=0$ からでも公式は同じになります。ただ $k=0$ からのほうが、証明等の扱いで便利だけです。

また、微分・積分するときがありますが、すべて (例外なく) n **での微分・積分** なので注意してください。このレポートでは、省略して Σ だけしか書いてありませんが、実際は、 n の関数ということです。

なお、このレポート投稿後に 2006 年の東大後期の入試において同様な事実が出題されましたが、その問題も今回のレポートのように、「奇数べきの場合の処理」「不思議な微分の証明」「偶数べきの場合の処理」という手順でやると、非常に簡単になります^{*1}。

1 Σk , Σk^2 , Σk^3 , Σk^4 , などの公式の積分を使っての求め方

まず、最初の方の公式で作り方を説明すると、次のようになります。

$$\textcircled{1} \quad \Sigma 1 = n \quad (\text{この } \Sigma \text{ だけは、} k=1 \text{ からと考えます。})$$

$$\textcircled{2} \quad \Sigma k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

① の式を積分して、②の式 (展開された形の方) を作るには^{*2}, $\int n \, dn = \frac{1}{2}n^2$ から②の前半部分が求まり、後半の n の係数は、 $n=1$ のときに和が 1 になるように決定します。(この n の係数のことを、ベルヌーイ数といいます。別に知らなくてもかまいません。) $\frac{1}{2}n^2 + \boxed{}n$

^{*1}さらに数学セミナー 2004 年 12 月号「エレガントな解答をもとむ」の浅井哲也先生の解説の中にも同様な事実が説明されていることを見つけました。

^{*2}不定積分の積分定数 $+C$ は、 $n=0$ のとき和が 0 になる数列ばかりなので、 $C=0$ となります。以下すべて、同様なので $+C$ は省略してしまうことにします。

で、 $n = 1$ のときに和が1になるためには、 $\square = \frac{1}{2}$ となります。これで、公式②が得られました。

次に Σk^2 の公式を作るには、②の式を2倍してから積分すると $\int (n^2 + n) dn = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2$ となり、これで前半部分が求まります。最後に n の係数を、 $n = 1$ のときに和が1になるように決定すれば、完成です。 $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \square n$ で、 $n = 1$ のとき和が1になるためには、 $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \square = 1$ より $\square = \frac{1}{6}$ となります。これで、次のような公式③(展開された形の方)が得られました。

$$\textcircled{3} \quad \Sigma k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

③式を3倍してから積分し、最後に n の係数を、 $n = 1$ のときに和が1になるように決定すると、(実は、3以上の奇数乗のべきの公式を求めるときは、 n の係数が0になることが知られています。)

$$\textcircled{4} \quad \Sigma k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

④の式を4倍してから積分し、最後に n の係数を、 $n = 1$ のときに和が1になるように決定すると、

$$\textcircled{5} \quad \Sigma k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

⑤の式を5倍してから積分すると、(3以上の奇数乗のべきの場合なので、積分するだけで求まります。)

$$\textcircled{6} \quad \Sigma k^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

⑥の式を6倍してから積分し、最後に n の係数を、 $n = 1$ のときに和が1になるように決定すると、

$$\textcircled{7} \quad \Sigma k^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$$

以下同様にやっていくと、 Σk^7 , Σk^8 , Σk^9 , ... もわりと楽に求まります。逆に⑦の公式を (n の1次式の部分は無視)、微分してから、6で割ると⑥の公式がでてきます。(今度は、係数を決定する必要がありません。) 特に奇数べきの場合は、 n の1次式の部分がないので、ただ微分するだけでよく、次のような不思議な微分の公式が成立します。 n での微分なのに k で微分している感じです。

不思議な微分の公式

$$(\Sigma k^3)' = 3\Sigma k^2, \quad (\Sigma k^5)' = 5\Sigma k^4, \quad (\Sigma k^7)' = 7\Sigma k^6, \quad (\Sigma k^9)' = 9\Sigma k^8$$

これは、3以上の奇数べきの場合は、成立します。それは、3以上の奇数の場合のベルヌーイ数が0であることに関係しています。(これも後で証明します。) 偶数の場合のベルヌーイ数は、0ではないので、こんな公式は、成立しません。定数分だけずれてしまいます。

2 積分を使って求められることの証明

積分で求まる理由を簡単に説明しておきます。(n, k は 0 以上の整数, m は自然数とします。)*³まず, 次の予備定理から

予備定理

$S_m(n) = \sum_{k=0}^n k^m$ とおくと $(S_m(n))' = mS_{m-1}(n) + b_m$ となる。

(証明) $S_m(n)$ の定義から, $S_m(n) - S_m(n-1) = n^m$

が, 任意の n に対して成り立つので, この式の両辺を n で微分すると

$$(S_m(n))' - (S_m(n-1))' = m \cdot n^{m-1} \dots (\text{ア})$$

この (ア) の式の n に 1 から n を順に代入すると

$$(S_m(1))' - (S_m(0))' = m \cdot 1^{m-1}$$

$$(S_m(2))' - (S_m(1))' = m \cdot 2^{m-1}$$

...

$$(S_m(n))' - (S_m(n-1))' = m \cdot n^{m-1}$$

となり, これを, 辺ごとに加えると $(S_m(n))' - (S_m(0))' = m \sum_{k=1}^n k^{m-1} = m \cdot S_{m-1}(n)$ が得られ, $b_m = (S_m(0))'$ とおけば, 予備定理の式がでてきます。(証明終わり)

この予備定理から, $S_m(n) = \int m \times S_{m-1}(n) dn + \int b_n dn$ で, $S_m(0) = 0$, $S_m(1) = 1$ から積分定数 $C = 0$ と n の係数 b_m がきまります。この b_m が 0 であると, さきほど出てきた「不思議な微分の公式」が成立する訳です。奇数べきなら「不思議な微分」が成立し, 偶数べきなら「不思議な積分」が成立します。

(例) $(\Sigma k^3)' = 3\Sigma k^2$, $\int (\Sigma k^2) dn = \frac{\Sigma k^3}{3}$ (積分定数は, 0 です。)

(参考) 差分・和分の考え方で求める方法について

簡単に表示するために 2 乗とか 3 乗のように次数が低い場合だけ触れておきます。まず 2 乗, 3 乗に括弧をつけて $n^{(2)} = n(n-1)$, $n^{(3)} = n(n-1)(n-2)$ のような階乗関数を定義します。

次に $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ と定義 (差分の定義) すると, 微分のように $\Delta n^{(3)} = 3n^{(2)}$ となるのが, 簡単に確認できます。

差分の逆演算として不定和分 Δ^{-1} も定義できて, $\Delta n^{(3)} = 3n^{(2)}$ となることから, $\Delta^{-1} n^{(2)} = \frac{n^{(3)}}{3} + C$ とかけます。

定和分も定義できて $\Delta^{-1} f(n) = F(n)$ ならば, $\sum_{a \leq n < b} f(n) = F(b) - F(a)$ となる*⁴ことも少し計算するとわかります。

以上のことを利用して Σk^4 を求めてみましょう。

*³微分は, n での微分です。 b_m は, m で決定する定数で, ベルヌーイ数と呼ばれています。

*⁴ b の方には, 等号が入っていません。

$$k^4 = k(k-1)(k-2)(k-3) + 6k(k-1)(k-2) + 7k(k-1) + k = k^{(4)} + 6k^{(3)} + 7k^{(2)} + k^{(1)}$$

から両辺を定和分すると次のようになります。

$$\sum_{k=0}^n k^4 = \frac{1}{5}(n+1)^{(5)} + \frac{6}{4}(n+1)^{(4)} + \frac{7}{3}(n+1)^{(3)} + \frac{1}{2}(n+1)^{(2)}$$

定和分において $0 \leq k \leq n+1$ の場合にあたるので、右辺は、 $F(n+1) - F(0)$ となります*⁵。
この右辺を整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5}(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{3}{2}(n+1)n(n-1)(n-2) + \frac{7}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}(n+1)n \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \end{aligned}$$

となります。 Σk^4 の計算だったので、まだ簡単に計算できていますが、次数があがるにつれて、 k^m を $k^{(m)}$ 、 $k^{(m-1)}$ 、 $\dots$ で表すだけでも大変で、さらに定和分した後に普通の形に変形するのも面倒になってきます。(定和分そのものは、とても簡単ですが…)

3 Σk , Σk^3 , Σk^5 , などの相互関係

奇数べきの場合です*⁶。 $\Sigma k^3 = (\Sigma k)^2$ となることは非常に有名ですが、その他に $\Sigma k^5 + \Sigma k^7 = 2(\Sigma k)^4$ となることが、参考文献 [1] に書いてありました。この証明を考えているときに、もついろいろな関係式が簡単に得られることに気が付いたので、証明は概略程度にして、**いろいろな関係式を作り出す方法**を中心に、述べたいと思います。

まず、 $\Sigma k^3 = (\Sigma k)^2$ を数学的帰納法で証明する場合に、右辺の $(\Sigma k)^2$ に注目し、 n の時と $n-1$ の時との差を考えると*⁷,

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{n^2}{4} ((n+1)^2 - (n-1)^2) = n^3$$

となり Σk^3 に等しくなることがわかる訳です。(n^3 が出てきたので Σk^3 に等しくなるはず。) つまり、証明問題でなくても、 $(\Sigma k)^2 = \Sigma k^3$ の Σk^3 を自分で導くことができる訳です。

Σk^3 を計算させて求めることは、よくありますが、ここでは、逆に $(\Sigma k)^2$ の計算に重点を置こうということです。

今度は、 $(\Sigma k)^3$ の n の時と $n-1$ の時との差を考えてみると

$$\frac{n^3(n+1)^3}{8} - \frac{n^3(n-1)^3}{8} = \frac{n^3}{8} ((n+1)^3 - (n-1)^3) = \frac{3}{4}n^5 + \frac{1}{4}n^3$$

となり、両辺を 4 倍した形で表示すると $4(\Sigma k)^3 = 3\Sigma k^5 + \Sigma k^3$ が成立することがわかります。

*⁵ $F(0) = 0$ です。

*⁶ここでも Σ は、すべて $k=0$ から n まで変化するものとします。

*⁷ $\Sigma k = \frac{n(n+1)}{2}$ になることは、知っているものとします。

(参考)

この $4(\Sigma k)^3 = 3\Sigma k^5 + \Sigma k^3$ を利用して Σk^5 を求めることができます。 $\Sigma k^5 = \frac{4}{3}(\Sigma k)^3 - \frac{1}{3}\Sigma k^3 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$ となることを確認するのは、そんなに面倒ではありません。ひょっとするとこれが一番簡単な Σk^5 の求め方ではないでしょうか？

今度は、 $(\Sigma k)^4$ を考えてみると

$$\frac{n^4(n+1)^4}{16} - \frac{n^4(n-1)^4}{16} = \frac{n^4}{16} ((n+1)^4 - (n-1)^4) = \frac{1}{2}n^7 + \frac{1}{2}n^5$$

となり、両辺を 2 倍した形で表示すると $2(\Sigma k)^4 = \Sigma k^7 + \Sigma k^5$ が成立することがわかります。これが、参考文献 [1] に書いてあったものです。

以下同様にやっていくと、このような関係式がどんどんでてきます。

奇数べきの場合の関係式

$$\text{K-①} \quad (\Sigma k)^2 = \Sigma k^3$$

$$\text{K-②} \quad 4(\Sigma k)^3 = 3\Sigma k^5 + \Sigma k^3$$

$$\text{K-③} \quad 2(\Sigma k)^4 = \Sigma k^7 + \Sigma k^5$$

$$\text{K-④} \quad 16(\Sigma k)^5 = 5\Sigma k^9 + 10\Sigma k^7 + \Sigma k^5$$

$$\text{K-⑤} \quad 16(\Sigma k)^6 = 3\Sigma k^{11} + 10\Sigma k^9 + 3\Sigma k^7$$

$$\text{一般的には } 2^{m-1}(\Sigma k)^m = {}_mC_1\Sigma k^{2m-1} + {}_mC_3\Sigma k^{2m-3} + \dots$$

この関係式の右辺は、 Σk^{2m+1} のように、奇数のべき乗が順番に出てくるので、その作り方から、帰納的に Σk^{2m+1} は、 Σk の多項式の形で表されることがわかります。

例えば Σk^7 なら $3\Sigma k^7 = 6(\Sigma k)^4 - 4(\Sigma k)^3 + (\Sigma k)^2$ と表示できます。この公式で $n = 10$ のとき実験してみると、 $\Sigma k = 55$ なので $3\Sigma k^7 = 6 \times 55^4 - 4 \times 55^3 + 55^2 = 54241275$ から $\Sigma k^7 = 18080425$ となります。(コンピュータで直接計算した値と一致することも確認)

さらに、右辺に出てくるのは、 Σk^3 より次数の高い奇数べきのものだけなので、帰納的に Σk^{2m+1} を n の多項式と見たときの、 n の係数である b_{2m+1} は、0 であることがわかります。(これが、不思議な微分の成り立つ理由です。)

4 Σk^2 , Σk^4 などの相互関係

偶数べきの場合です。次数が偶数の場合は、 $2n+1$ をかけたものを考えるのが普通のやり方です。まず $(2n+1)(\Sigma k)^2$ の n の時と $n-1$ の時との差を考えてみると

$$\begin{aligned} & (2n+1) \frac{n^2(n+1)^2}{4} - (2n-1) \frac{n^2(n-1)^2}{4} \\ &= \frac{n^2}{4} (2n((n+1)^2 - (n-1)^2) + ((n+1)^2 + (n-1)^2)) \\ &= \frac{5}{2}n^4 + \frac{1}{2}n^2 \end{aligned}$$

となり、両辺を2倍した形で表示すると $2(2n+1)(\Sigma k)^2 = 5\Sigma k^4 + \Sigma k^2$ が成立します。

次に $(2n+1)(\Sigma k)^3$ を考えてとやっていくのですが、奇数べきの場合に比較して計算がとても面倒になってきます。そこで、何かいい方法がないかなと思い、微分したらどうかとやっているうちに、「不思議な微分公式」が成り立つことを発見しました。これにより K-①～⑤の公式を微分すれば、簡単に偶数べきの場合も関係式を作れることがわかったのです。自分では、発見と思っているのですが、何かの本にこんなやり方が紹介されていたら教えて下さい。

まず $(\Sigma k)^m$ を微分する^{*8}と $m(\Sigma k)^{m-1}(n + \frac{1}{2})$ となることに注意して

K-① $(\Sigma k)^2 = \Sigma k^3$ の両辺を n で微分し、少し整理すると $(2n+1)(\Sigma k) = 3\Sigma k^2$ が得られます。

K-② $4(\Sigma k)^3 = 3\Sigma k^5 + \Sigma k^3$ の両辺を n で微分し、少し整理すると $6(2n+1)(\Sigma k)^2 = 15\Sigma k^4 + 3\Sigma k^2$ が得られます。

両辺を3で割ると、さきほど差分を利用して求めた $2(2n+1)(\Sigma k)^2 = 5\Sigma k^4 + \Sigma k^2$ が求まります。

以下同様にやっていくと、(すべて K-①～⑤の公式と対応しています。)

偶数べきの場合の関係式

$$G-① \quad (2n+1)(\Sigma k) = 3\Sigma k^2$$

$$G-② \quad 2(2n+1)(\Sigma k)^2 = 5\Sigma k^4 + \Sigma k^2$$

$$G-③ \quad 4(2n+1)(\Sigma k)^3 = 7\Sigma k^6 + 5\Sigma k^4$$

$$G-④ \quad 8(2n+1)(\Sigma k)^4 = 9\Sigma k^8 + 14\Sigma k^6 + \Sigma k^4$$

$$G-⑤ \quad 16(2n+1)(\Sigma k)^5 = 11\Sigma k^{10} + 30\Sigma k^8 + 7\Sigma k^6$$

この関係式の右辺は Σk^{2m} のような偶数のべき乗が順番に出てくるので、その作り方から帰納的に Σk^{2m} は、 $(2n+1) \times (\Sigma k \text{ の多項式 })$ の形で表されることがわかります。例えば Σk^4 なら $15\Sigma k^4 = (2n+1)(6(\Sigma k)^2 - (\Sigma k))$ と表示できます。これ自身も何かきれいな公式ですね。

奇数と偶数の場合をまとめると、「 Σk^{2m+1} は、 Σk の多項式の形で表され、 Σk^{2m} は、 $(2n+1) \times (\Sigma k \text{ の多項式 })$ の形で表される。」という Faulhaber の定理の一部が、わりと簡単に証明できました。参考文献 [2] の「ベルヌーイ数とゼータ関数」の p.3 によると、Faulhaber は 1631 年ころすでにこのレポートに書いたようなことを知っていて、しかもその多項式の係数まで決定する方法を与えているようです。

さらにこの本の p.1 に、ベルヌーイは 1 から 1000 までの 10 乗の和を 7 分 30 秒ほどで求めたとあります。私はとてもこの時間内に求めることはできませんが、偶数べきの場合の公式 G-①～⑤を順次使い、さらにコンピュータまで利用して実験してみると、

$n = 1000$ のとき

$$\Sigma k = 500500, \Sigma k^2 = 333833500, \Sigma k^4 = 20050033333300, \Sigma k^6 = 143357642856976190500, \\ \Sigma k^8 = 111611777777311113333300$$

となり、これらを公式 G-⑤に代入すると $\Sigma k^{10} = 91409924241424243424241924242500$ という正確な値が求まりました。(UBASIC で直接計算した値と一致することも確認)^{*9}

^{*8}合成関数の微分法です。 $n + \frac{1}{2}$ は Σk の微分。

^{*9}ついでに一言、 Σk^4 などで 333... のように同じ数字が並ぶのも何か訳があるのでしょいか？

5 追加の公式

K-②と G-③ を組み合わせると $7\Sigma k^6 + 5\Sigma k^4 = (2n+1)(3\Sigma k^5 + \Sigma k^3)$ となります。また $(\Sigma k^2)^2$ を同様な手法で計算してみると $3(\Sigma k^2)^2 = 2\Sigma k^5 + \Sigma k^3$ という公式も作れます。

追加の関係式

$$T-① \quad 7\Sigma k^6 + 5\Sigma k^4 = (2n+1)(3\Sigma k^5 + \Sigma k^3)$$

$$T-② \quad 3(\Sigma k^2)^2 = 2\Sigma k^5 + \Sigma k^3$$

数学の得意な高校生にこういった公式の証明問題を宿題として出題してみるのも、おもしろいかもしれません。

さらに G-①~⑤ を n で微分し, $n=0$ を代入すると, ①以外の左辺は 0 になります。微分したあとに (Σk) が残れば, $n=0$ を代入すると $(\Sigma k) = 0$ になるからです。右辺は, n で微分し, $n=0$ を代入すると, ベルヌーイ数 b_m がそれぞれ残ります。結局次のような関係式ができます。(①以外は単純に置き換えるだけです。)

ベルヌーイの関係式 (これからベルヌーイ数 b_m が順番に求まります。)

$$B-① \quad \frac{1}{2} = 3b_2$$

$$B-② \quad 0 = 5b_4 + b_2$$

$$B-③ \quad 0 = 7b_6 + 5b_4$$

参考文献

- [1] 小野孝「数論序説」裳華房, 1987. この本の p.4 の問題 1.4 が $2(\Sigma k)^4 = \Sigma k^7 + \Sigma k^5$ を示せというものです。私は, この本で初めて $2(\Sigma k)^4 = \Sigma k^7 + \Sigma k^5$ という等式を知りました。
- [2] 荒川恒男・伊吹山知義・金子昌信「ベルヌーイ数とゼータ関数」牧野書店, 2001.
このレポートで使用した予備定理などが紹介されていますが, 直接積分して Σk^5 などを求めようとはしていません。実質は同じなのですが, 重点を置いている所が違います。
- [3] 丸山哲郎「差分方程式序説」現代数学社, 1981.
この本にも積分して Σk^5 などが求まることが書いてあるようですが, 重点がベルヌーイ数とかベルヌーイ多項式の方にあるので, 表示が簡単ではありません。このレポートでは, 逆に積分を知っているだけで, ベルヌーイ数まで簡単に求められることを示したかったのです。
- [4] Jeffrey Stopple, A Primer of Analytic Number Theory, Cambridge University Press, 2003.
この本の第1章に, とても読みやすい差分・和分の解説があります。
このレポートを書き終わってからも, いろいろな本を調べていたら, 下の2冊の本を見つけました。このレポートの内容は, 事実だけなら何百年も前から知られていることなので, これ以外にも, いろいろな本に出ている可能性があります。それはともかく, 導き方が, 新しいのでは, ないかと思ってるのですが, どうでしょうか?
- [5] 一松信「数学検定問題集 1 級」創育, 1998. この本の p.14 の問題 4(Σk^4), p.89 の問題 1(Σk^5)などが, このレポートの公式 G-②, K-②で差をとったのと同様な方法で求めるという形で紹介されていました。
- [6] Edward J Barbeau, Power Play, Mathematical Association of America, 1997.
この本の p.24 に, このレポートの公式 K-④と同じ式が紹介されていました。