数学日記

市立習志野高等学校 (定時制)　　肥後利朗

数学日記なるものを書いてみました。

学者の中には，毎日その日にやった研究内容を書いている人がいるそうですが，そんなおおげさなものではありません。ここ 2，3 年の私の数学的な出来事を書いただけです。硬軟いろいろな内容がありますので読みやすいように日付は適当に付けました。軽い読み物として読んでください。

この日記を書いて一番言いたかった事は「皆さん数学を楽しんでいますか？」という事です。教材研究，指導法研究，評価研究 $\cdots$ それぞれ大切な事柄ですが，純粋に自分が数学を楽しむという事を忘れていませんか？という事なのです。

ではどうぞ。

4 月 20 日

市立銚子高校の F 先生から数学の問題が FAX で届く。

「円に外接する四角形は 4 辺が決まれば唯一つか？」

という問題。考え始めると仕事中でも，電車の中でも，食事中でも，風呂の中でも問題が頭から離れない。仕事があまり進まなかったのは F 先生のせいである。完全解ではないにしてもある程度の事がひらめくのはいつも風呂の中である。

5 月 10 日

マイナスかけるマイナスをいつもマイナスにしてしまうポルトガル人の D 君。「プラスだよ」と注意をすると「先生，ポルトガルではマイナスかけるマイナスは，マイナスなんですよ」

5 月 13 日

数学の授業で映画「博士の愛した数式」を見てきた話をする。「博士は 80 分しか記憶がもたないんだ」と言ったらある生徒が「先生，僕は 45 分しか記憶がもちません」

45 分は定時制の 1 限の長さである。

6 月 20 日

数学セミナーの「エレガントな解答をもとむ」をちょっと考える。

『$a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ に対してこれらの基本対称式の値が $k = 1, 2, \cdots, n$ すべてにおいて正なら，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ はすべて正である事を示せ』(数学セミナー 2007 年 7 月号)

$$a + b > 0\ ,\ ab > 0 \text{ ならば } a > 0\ ,\ b > 0$$

などはよく教科書にも出てくるが，何故 n 次に拡張する事を考えなかったのだろうか。与えられた問題が出来て良しとしてしまう自分が情けない。

県立松戸高校の H 先生はこの欄の常連でよくお名前を拝見する。尊敬してしまう。

7 月 25 日

生徒がいない夏休み。研究室で「今日は朝から数学をしっかり勉強するぞ」と思う時に限って「肥後さん，あの書類できたあ？」と電話がかかってくる。

ガウスが天文台長になって「数学には細切れにされない時間が最も必要だ」と言った気持ちがわかる (ガウスと比較してどうなるのだろう？)。

8 月 12 日

有志による夏の数学セミナーに出席。今年のテーマは「リーマンのゼータ関数」

$1 + 2 + 3 + \cdots = -\dfrac{1}{12}$ などの式を見て，以前興味を持って勉強した所なので楽しみだった。湘南数学教育コンサルタントの時田氏も来た。彼の知識量に圧倒される。発表される講師の先生方の学習意欲にも頭が下がる。解析接続についてコメントする。

9 月 3 日

数学書房主催の講座「数学の発見」に出席。今日の講義は立教大学の佐藤文広先生による「整数の分割」について。途中休憩をはさんで 90 分 3 コマ。

整数の分割とは正の整数 n を n 以下の正の整数の和に分ける仕方のことである。もちろん和の順番は問わない。

例えば 4 なら 4，$3+1$，$2+2$，$2+1+1$，$1+1+1+1$ である。5 なら 5，$4+1$，$3+2$，$3+1+1$，$2+2+1$，$2+1+1+1$，$1+1+1+1+1$ である。

いったい n の分割が何通りあるのか興味があるわけで，それを n の分割数と呼び $P(n)$ で表す。上の例で言えば $P(4) = 5, P(5) = 7$ となる。

日常的には使える数に制限を加えた分割ならよくやることだ。例えば 200 円のノート (教育者が例題を作るとすぐ，ノートとか鉛筆とかのつまらない例に先天的になってしまう) を 1 円玉，5 円玉，10 円玉で支払う方法は何通りか $\cdots$ などは整数の分割問題である。もっともこれが何通りか考えながら買い物をする人はいないわけで，なるべく小さい分割で支払う人と財布の中身を軽くする目的で大きい分割で支払う人の 2 種類あるようだ (ちなみに私は後者に属している)。

n が小さい場合のいくつかの $P(n)$ を計算してみると事はそんなに簡単でないことがわかる。$P(10)=42$，$P(100)=190509292$ と急激に大きくなり，推定して帰納法でチョイなんて代物ではない。こういう場合の常套手段として，整数の問題として考えると難しいから解析の問題として扱うのがよい。

例えばフィボナッチ数列 $1,1,2,3,5,\cdots$ の性質を調べたかったらその母関数 $\dfrac{x}{1-x-x^2}$ を調べればよい。この関数は $1x+1x^2+2x^3+3x^4+5x^5+\cdots$ と展開され係数にフィボナッチ数列が現れる。母関数がわかれば整数の世界から解析の世界への橋渡しができて，微分・積分などいろいろな解析的操作を可能にする。

これと同じように $P(n)$ もその母関数が求められる。それは

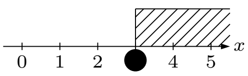
$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-1}=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{1-x^3}\times\cdots$$

展開すると $1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(n)x^n$ となり分割数 $P(n)$ が係数に現れる。これらをハーディやラマヌジャンが研究対象としていた。

で結局 $P(n)$ はどうなるのか $\cdots$ というのは式を見ただけで恐ろしくてここには書けない。(興味のある方は『数学辞典』(岩波) なり『整数の分割』(数学書房) なりを見てください)。

9 月 10 日

「$x>3$ を図示する時は，$x=3$ の所に穴をあける」と言ったら「コンパスの針でいいんですか」と真顔で生徒が言った。「$x\geqq 3$ を図示する時は，$x=3$ の所をぬりつぶす」と言ったら



とやった生徒がいた。

9 月 27 日

日本数学会主催の市民講演会を千葉大学に聞きに行く。講演が始まる前，私の隣で何かブツブツ言っている変なオジサンがいるなと思ったら講演者の一人，京都大学の加藤和也先生であった。「見えないものでもあるんだよ」という演題で内容は p 進数についてである。先生は漫画を使った独特の語り口で聴衆をひきつけておられた。

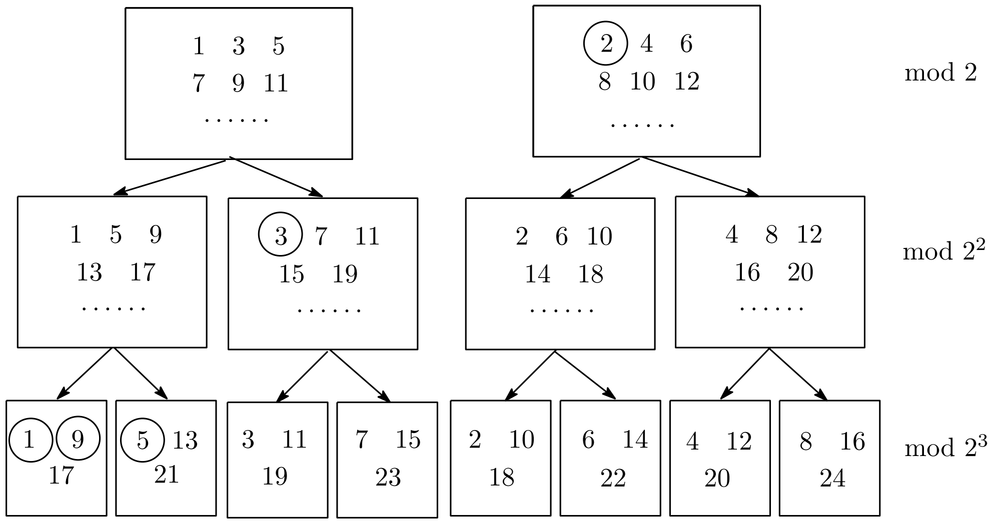
まず問題を 1 つ。

第 1 問

$2,3,5,9$ の中で 1 に最も近いのはどれか？

これは 3 歳児に聞いても「2」と答える。そこで私はこの 3 歳児に言う。「ボクの答えは実数直線上においては正しい。しかし 2 進的遠近においては 9 が正解だよ」と。

2 進的遠近感は次のように定義される。自然数を $\mathrm{mod}\ 2^k$ で次々にクラス分けしていく。



そこで 1 とできるだけ長い間同じクラスに入っている数がより 2 進的に 1 に近いと定義する。1 と mod 2^3 まで同じクラスに入っているのは 9，mod 2^2 まで入っているのは 5，mod 2 まで入っているのは 3，2 は mod 2 でも同じクラスに入らない。という事で 1 に近い順に並べると $9, 5, 3, 2$ となる。

どの数とどの数が 2 進的に近いかを簡単に判定するには，それぞれの数の差を素因数分解して 2^m の m の値を比較すればよい。この m は 2 進付値と呼ばれる。2 進付値が大きい程，2 つの数は 2 進的に近いという事になる。

$336 - 200 = 136 = 2^3 \times 17$ なので $336 - 200$ の 2 進付値は 3。$336 - 308 = 28 = 2^2 \times 7$ なので $336 - 308$ の 2 進付値は 2。よって 336 には 200 の方が 308 より 2 進的に近い。同様にして 3 進的，5 進的など p 進的遠近や p 進付値が定義される。

第 2 問

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots\cdots$ を求めよ。

無限等比級数の問題である。これは高校生でなくとも，ちょっとかしこい小学校高学年の児童なら「∞」と答えるだろう。そこで私はその児童に言う。「キミの答えは実数の世界では正しい。しかし 2 進的には -1 が正解だよ」と。

$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$ と -1 が 2 進的にどれくらい近いかを調べる。

$x_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$ とおいて -1 との差をとると，$x_n - (-1) = 2^{n+1}$。ここで $n \longrightarrow \infty$ とすれば $2^{n+1} \longrightarrow \infty$ なので，$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$ と -1 の差の 2 進付値は ∞ である。ということは $x_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$ はだんだん 2 進的には -1 に近づいていく。

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i = -1 \quad (2\text{ 進的に})$$

これは無限等比級数の公式 $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$ において $x = 2$ とした式と一致する。

エッ？x は $|x| < 1$ じゃないとダメなんじゃないの？イエイエ，p 進的には何を入れてもいい

のです。

命題

p ; 素数, c ; 整数, c の p 進付値が 1 以上ならば

$$\sum_{i=0}^{\infty} c^i = \frac{1}{1-c} \quad (p\text{ 進的に})$$

例えば

$$1-5+25-125+\cdots = \frac{1}{1-(-5)} = \frac{1}{6} \quad (5\text{ 進的に})$$

ここまででも十分面白いと思うのだけれどさらにここから有理数体 $\mathbb{Q}$ を p 進距離として見る事によって，体 $\mathbb{Q}_p$ なるものが定義され，なんとこれが有理数体 $\mathbb{Q}$ の完備化になってしまう。$\mathbb{Q}$ の完備化は実数体 $\mathbb{R}$ しかないと思っていたのが我々のすぐ隣りにこんなパラレルワールドが存在していたなんて。オドロキ，モモの木，サンショの木。

10 月 18 日

Remmert の「Theory of Complex Functions」のセミナーに参加。黒板で発表していたら筑波大駒場高の 3 年生で数学オリンピックにも出た A 君に間違いを指摘される。あとで「君，高 3 なんだけど受験勉強しなくていいの？」と聞いたら「別に気にしていません」とのこと (彼はその後，東大数学科に現役合格した)。

11 月 8 日

千葉南高校で秋季研究大会。講演していただいた東京理科大学の芳沢光雄先生を交えて，反省会。先生はテレビや雑誌で数学的に間違った事を言っていると抗議の電話をするという。あちこちで数学の話で盛り上がる。参加されていた女性の I 先生。「どこも数学の難しい話ばかりでつまらない」「じゃあどんな話がいいの……？」「… 世間話がいい」

11 月 18 日

東京大学大学院数理科学研究科主催の数学公開講座に出席。駒場まで出かける。「対称性と群」についての講演が 3 つあった。開成高校の生徒が数人来ていた。先生に行って来るように言われたとのこと。話の内容はわからないかも知れないけれど，知的好奇心をかきたてるには大切なことだ。

1 月 15 日

$2\sqrt{18}$ を簡単にせよ，という問題を出したら何人かが 9 と答えていた。どうやら $2\sqrt{18}$ を $2\overline{)18}$ (18 わる 2) と考えたらしいことがわかった。

3 月 24 日

数学工房で一日勉強。スターリング数を出発点としてさまざまな数の織りなす世界を堪能した。

P の出世物語

二項定理から $(1+x)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^n$ もちろん $\binom{n}{m} = {}_n\mathrm{C}_m$ で P の出番がない。

$\dfrac{{}_n\mathrm{P}_m}{m!}$ で $\binom{n}{m}$ の所に入っても自己主張した事にはならない。P にも光を！

そこで n を変数 x に変えて

$${}_x\mathrm{P}_m = x(x-1)(x-2)\cdots(x-m+1)$$

という m 次関数にしてしまう。ニュートンはこれを $(x)_m$ という記号で書いて，補間基底と呼んだ。

$(x)_0 = 1$，$(x)_1 = x$，$(x)_2 = x(x-1)$，$(x)_3 = x(x-1)(x-2)$，$\cdots$

すると二項定理とそっくりな式

$$x^n = \sum_{m=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} (x)_m$$

が成り立つ。ここで $(x)_m$ の係数 $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ は第 II 種スターリング数と言って，n 元集合を m 個の部分集合に分割する総数で定義される。

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1 \longrightarrow (\{a,b,c\})$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 3 \longrightarrow (\{a\},\{b,c\}) \quad (\{b\},\{a,c\}) \quad (\{c\},\{a,b\})$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = 1 \longrightarrow (\{a\},\{b\},\{c\})$$

これらを武器に最終的には高校数学の花形，k 乗の和

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

が $(x)_m$ と $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\}$ を使って表せる。これでやっと P にも光があたる。メデタシ，メデタシ。

ところで一般的には $S_k(n)$ はベルヌイ多項式で表されることが多い。

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \Big\{ B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1) \Big\}$$

ものの本には

$$\frac{t\,e^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{t^k}{k!}$$

で $B_k(x)$ を定義しているがわかりづらい。講師の桑野先生は「x から $x+1$ まで積分したら x^k になる関数」すなわち

$$\int_x^{x+1} B_k(t)\,dt = x^k$$

と定義した。これは，わかりやすくて感激。

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},\ B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},\ B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}$$

例えば

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \frac{1}{3}\left\{B_3(n+1) - B_3(1)\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{(n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1) - \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$B_k(0)$ でベルヌイ数 b_k が定義され，これが第 II 種スターリング数やニュートンの補間基底と結びつく。結果的には

$$S_k(n) = \sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{m} \left\{ \begin{matrix} k \\ m-1 \end{matrix} \right\} (n+1)_m$$

となり P は日の目を見るに至る。例えば

$$\begin{aligned} S_2(n) &= \sum_{m=1}^{3} \frac{1}{m} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ m-1 \end{matrix} \right\} (n+1)_m \\ &= \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right\} (n+1)_1 + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} (n+1)_2 + \frac{1}{3} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} (n+1)_3 \\ &= 0 + \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

このあと講義はオイラーの微分作用素との関係，$S_k(n)$ の母関数との関係，ニュートン・グレゴリーの式とテーラーの式の類似性へと発展していったのである。いろいろな概念と次々につながり，数学の大海に向かってこぎ出す小さな船の中にいる自分を連想した。

数学工房の終わったあとは，いつもの場所のいつもの店でスタミナ・メンチカツ定食を食べて帰るのが決まり。

とりとめのないことを書きましたが，これで数学日記を終わります。