

# 正四面体，単体の中心角

柏陵高等学校 氏家 悟

## 1 正四面体の中心角

数学 I の教科書には正四面体の体積が載っていたが，中心角も数学 I の内容だろうと考え求めてみた。いわゆる，メタン分子の絵を模式的に描いたとき，真ん中にある炭素原子から伸びる水素の腕の角度である（本当にそんな形なのかは知らないが）。

四面体の重心は，頂点と底面の三角形の重心を結ぶ直線上にある。三角形の重心は中線上にあるから，図の AM, DM を 2 : 1 に内分する点をそれぞれ H, K とすると四面体の重心は AK, DH の交点となり，AK, DH を 3 : 1 に内分する点となる。

正四面体の辺の長さを 1 とすれば，

$$\text{正三角形の中線だから } AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

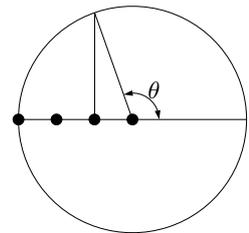
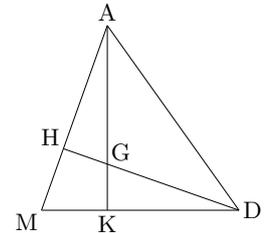
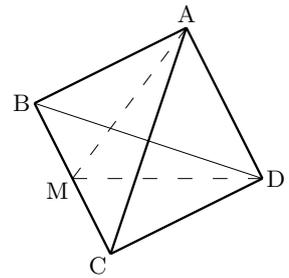
$$K \text{ は三角形の重心だから } MK = \frac{DM}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$AK = \sqrt{AM^2 - MK^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$G \text{ は四面体の重心だから } AG = \frac{3}{4}AK = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\triangle GAD \text{ に余弦定理を適用して } \cos \angle AGD = \frac{GA^2 + GD^2 - AD^2}{2GA \cdot GD} = -\frac{1}{3}$$

関数電卓で角度を求めると，109.4712206... 度ではあるが，切りが悪くて分度器で測るのも覚えるのも厄介である。しかし，「余弦が  $-\frac{1}{3}$ 」は描くのも覚えるのも簡単。この角を 6 個貼り合わせればメタンの模型となる。



## 2 重心の考察

三角形の重心が「中線の交点」となるのは，漠然と「中線は面積を半分にするから重心を通る」からだと考えていたが，そうではない（重心を通ることが必要条件でない）ことが仲間との議論の中で，昨年気付いた。

実際、重心を通り底辺に平行な直線は、三角形の面積を4:5に分け、重心を通るにもかかわらず、面積を半分にしな。ということは、底辺に平行な直線で面積を半分にするものは、重心を通らない。知っている人にとっては、「何をいまさら」だろうが、自分はそれまで考えてもみなかったことである。

重心はあくまでも、「無数の質点を1点に代表させる」という、解析的な考え方（積分）で求めるしかなく、数学Iの教科書で天下りに「中線を2:1に分ける点」と記述しているのまうなずける。数学Iの授業で、「中線は面積を半分にするから重心を通る」と説明したこともあり、悔い改めねばならぬことであった。

同じ質量の2つの質点の重心は中点である。そして、同じ質量の質点が線分上に等間隔に $n$ 個並ぶときも重心は線分の中点となる。さらに、線分は無数( $n \rightarrow \infty$ )の質点が均一に広がっている状態と考えて、「線分の重心は中点」となるのだろう。

三角形の場合は、底辺に平行な直線で無数に分割したそれぞれは、限りなく線分に近いので、それらの重心はそれぞれの中点となる。したがって、それら重心はすべて三角形の中線上に並ぶから、三角形の重心は中線上にあることになり、「中線の交点が重心」となる。

四面体も底面に平行な平面で無数に分割し、そのときの切り口の各三角形の重心は、頂点と底面の三角形の重心を結ぶ直線上に並ぶ。したがって、四面体の重心は、頂点と底面の三角形の重心を結ぶ直線上にある。よって、別の底面の重心と頂点を結ぶ直線との交点、四面体の重心となる。

求め方は面倒だが、直線で囲まれた均質な図形の重心は、いずれも「頂点の座標の和 ÷ 頂点の数」になることには変わりはない。

### 3 ベクトルバージョン

さて、正四面体の中心角の余弦をベクトルでも求めてみた。ベクトルを使えば、三平方の定理や、余弦定理などを意識することはなくなる。

そもそも、余弦定理は三平方の定理の拡張であるし、ベクトルの内積は余弦定理そのものである。つまりベクトルの内積を使うことは、余弦定理や三平方の定理を使うことと同じで、その分計算が抽象化され、あまり図形を意識することがなくなる。

つまり、ベクトルを使うことによって、立体を意識することはなくなり、せいぜい「正三角形の内積」を使う程度の計算問題（数学B）となる。

正四面体の頂点のひとつを原点 $O(\vec{0})$ とし、他の3つの頂点の位置ベクトルを $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$ とすると、重心 $G(\vec{g})$ は4頂点の真ん中なので、 $\vec{g} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ である。

このとき、 $G$ から頂点 $O$ ,  $A$ にのぼした半直線のなす角（つまり中心角）を $\theta$ とすると、 $\cos \theta = \frac{\vec{GO} \cdot \vec{GA}}{|\vec{GO}| |\vec{GA}|}$ であるから、分子と分母をそれぞれ計算する。

$$\vec{GO} = \vec{0} - \vec{g} = -\vec{g}, \quad \vec{GA} = \vec{a} - \vec{g}$$

まずは分子の計算。

$$\vec{GO} \cdot \vec{GA} = -\vec{g} \cdot (\vec{a} - \vec{g}) = -\vec{g} \cdot \vec{a} + |\vec{g}|^2,$$

ここで、

$$\begin{aligned}\vec{g} \cdot \vec{a} &= \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \\ |\vec{g}|^2 &= \vec{g} \cdot \vec{g} = \left(\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\right) \cdot \left(\frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\right) = \frac{1}{16}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a})\end{aligned}$$

ここで、辺の長さを 1 とすれば、各位置ベクトルの大きさは  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$  となり、すべての三角形は正三角形であるから 2 辺の内積は、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  である。他にも同様に、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$  より

$$\vec{g} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}, \quad |\vec{g}|^2 = \frac{3}{8}$$

したがって、分子は

$$\vec{GO} \cdot \vec{GA} = -\vec{g} \cdot \vec{a} + |\vec{g}|^2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = -\frac{1}{8},$$

つづいて分母だが、図の対称性より重心から見た頂点 A, O は可換であるから、 $|\vec{GA}| = |\vec{GO}|$  より、

$$|\vec{GO}| |\vec{GA}| = |\vec{GO}|^2 = |\vec{g}|^2 = \frac{3}{8}$$

ゆえに、

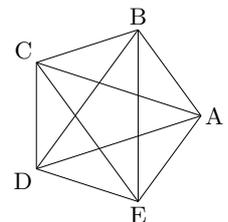
$$\cos \theta = -\frac{1}{8} \div \frac{3}{8} = -\frac{1}{3}$$

#### 4 五胞体の中心角

三角形は「2次元単体」でその中心角の余弦は  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ 、四面体は「3次元単体」でその中心角の余弦は  $-\frac{1}{3}$  であるから、4次元単体のすべての辺の長さが等しい正五胞体の中心角の余弦は  $-\frac{1}{4}$  ではなからうか。

ベクトルを使えば立体図形に頼らないので、計算できそうである。

一応図にすると、どれが手前の線なのかわからないのですべて同じ太さの線で描くと、正五角形の中に五芒星を書き入れた平面図形に見える。これは 5 点のすべてを結んだ「完全グラフ」と言われる。しかし、この場合平面ではなく、頂点 5 個、辺  ${}_5C_2 = 10$  本、三角形  ${}_5C_3 = 10$  個、四面体  ${}_5C_4 = 5$  個にかこまれた立体と考えていただきたい。



ちなみに、最初の正四面体の図は、線の太きを変えて立体的に見せているとはいえ、あえて正方形に対角線をひいた形 (4 点の完全グラフ) に描いている。

この五胞体の重心は、頂点 A から四面体 BCDE の重心へ引いた直線と、頂点 B から四面体 CDEA の重心へ引いた直線との交点になり、その位置は「頂点の座標の和 ÷ 5」になるわけだが、三平方の定理や余弦定理 (数学 I) を駆使して中心角を求めようとする、頭がくらくらする。

ベクトルによる手順は、正四面体に4次元方向に単純に点が1個増えただけで、正四面体の手順と同じである。

正五胞体の頂点のひとつを原点  $O(\vec{0})$  とし、他の4つの頂点の位置ベクトルを  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$ ,  $D(\vec{d})$  とすると、重心  $G(\vec{g})$  は5頂点の真ん中なので、 $\vec{g} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$  である。

このとき、 $G$  から頂点  $O$ ,  $A$  にのびた半直線のなす角（つまり中心角）を  $\theta$  とすると、 $\cos \theta = \frac{\vec{GO} \cdot \vec{GA}}{|\vec{GO}| |\vec{GA}|}$  であるから、分子と分母をそれぞれ計算する。

$$\vec{GO} = \vec{0} - \vec{g} = -\vec{g}, \quad \vec{GA} = \vec{a} - \vec{g}$$

まずは分子の計算。

$$\vec{GO} \cdot \vec{GA} = -\vec{g} \cdot (\vec{a} - \vec{g}) = -\vec{g} \cdot \vec{a} + |\vec{g}|^2,$$

ここで、

$$\begin{aligned} \vec{g} \cdot \vec{a} &= \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \cdot \vec{a} = \frac{1}{5}(|\vec{a}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{d} \cdot \vec{a}) \\ |\vec{g}|^2 &= \vec{g} \cdot \vec{g} = \left( \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \right) \cdot \left( \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) \right) \\ &= \frac{1}{25}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{d} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{d} + 2\vec{c} \cdot \vec{d}) \end{aligned}$$

ここで、辺の長さを1とすれば、各位置ベクトルの大きさは  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$  となり、すべての三角形は正三角形であるから2辺の内積は、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$  である。他にも同様に、 $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{1}{2}$  より

$$\vec{g} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}, \quad |\vec{g}|^2 = \frac{2}{5}$$

したがって、分子は

$$\vec{GO} \cdot \vec{GA} = -\vec{g} \cdot \vec{a} + |\vec{g}|^2 = -\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = -\frac{1}{10},$$

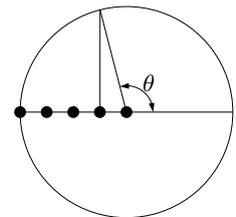
つづいて分母だが、図の対称性より重心から見た頂点  $A$ ,  $O$  は可換であるから、 $|\vec{GA}| = |\vec{GO}|$  より、

$$|\vec{GO}| |\vec{GA}| = |\vec{GO}|^2 = |\vec{g}|^2 = \frac{2}{5}$$

ゆえに、

$$\cos \theta = -\frac{1}{10} \div \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}$$

と予想通りである。そして、図のような大きさとなる。



## 5 正 $n$ 次元単体の中心角

調子に乗って、

1次元単体「線分」の重心は中点で、その角の余弦は  $\cos 180^\circ = -1$

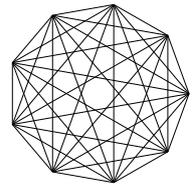
正2次元単体の中心角の余弦は  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

正3次元単体の中心角の余弦は  $-\frac{1}{3}$

正4次元単体の中心角の余弦は  $-\frac{1}{4}$

から、正  $n$  次元単体の中心角の余弦は  $-\frac{1}{n}$  だろう。 $n+1$  個の点で考え、ベクトルで計算するだけである。空間的な想像力を別にすれば、機械的な計算であり、図形に頼るのは、正三角形の辺の長さ程度で、まさに「代数」の威力である。

五胞体の絵のように、 $n$  次元単体を平面に描くと  $n+1$  個の頂点をすべて直線で結んだ、グラフ理論で言ういわゆる「完全グラフ」になる。つまり、 $n$  次元単体は、頂点  $n+1$  個、辺  ${}_{n+1}C_2$  個、正三角形  ${}_{n+1}C_3$  個、正四面体  ${}_{n+1}C_4$  個、正五胞体  ${}_{n+1}C_5$  個、 $\dots$ 、正  $n-1$  次元単体  ${}_{n+1}C_n$  個で囲まれた図形になる（図は8次元単体）。



頂点のひとつを原点  $O(\vec{0})$  とし、他の  $n$  個の頂点の位置ベクトルを  $A_1(\vec{a}_1)$ ,  $A_2(\vec{a}_2)$ ,  $\dots$ ,  $A_n(\vec{a}_n)$ , とすると、重心  $G(\vec{g})$  は  $n+1$  個頂点の真ん中なので、 $\vec{g} = \frac{1}{n+1}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n)$  である。

このとき、 $G$  から頂点  $O$ ,  $A_1$  にのびた半直線のなす角（つまり中心角）を  $\theta$  とすると、 $\cos \theta = \frac{\vec{GO} \cdot \vec{GA}_1}{|\vec{GO}| |\vec{GA}_1|}$  であるから、分子と分母をそれぞれ計算する。

$$\vec{GO} = \vec{0} - \vec{g} = -\vec{g}, \quad \vec{GA}_1 = \vec{a}_1 - \vec{g}$$

$$\vec{GO} \cdot \vec{GA}_1 = -\vec{g} \cdot (\vec{a}_1 - \vec{g}) = -\vec{g} \cdot \vec{a}_1 + |\vec{g}|^2$$

ここで、

$$\vec{g} \cdot \vec{a}_1 = \frac{1}{n+1}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) \cdot \vec{a}_1 = \frac{1}{n+1}(|\vec{a}_1|^2 + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1)$$

$$|\vec{g}|^2 = \vec{g} \cdot \vec{g} = \frac{1}{n+1}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n) \cdot \frac{1}{n+1}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2}(|\vec{a}_1|^2 + |\vec{a}_2|^2 + \dots + |\vec{a}_n|^2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_3 + \dots + 2\vec{a}_{n-2} \cdot \vec{a}_n + 2\vec{a}_{n-1} \cdot \vec{a}_n)$$

ここで、辺の長さを1とすれば、三角形  $OA_1A_2$  は正三角形で、2辺  $OA_1$ ,  $OA_2$  のなす角は  $60^\circ$  だから、

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = |\vec{a}_1|^2 = |\vec{OA}_1|^2 = 1$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{OA}_1 \cdot \vec{OA}_2 = |\vec{OA}_1| |\vec{OA}_2| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

他の番号についても同様に、 $i \neq j$  のとき  $OA_iA_j$  は正三角形だから

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i = |\vec{a}_i|^2 = |\vec{OA}_i|^2 = 1$$

$$i \neq j \text{ ならば, } \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \vec{OA}_i \cdot \vec{OA}_j = |\vec{OA}_i| |\vec{OA}_j| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

であるから,

$$\vec{g} \cdot \vec{a}_1 = \frac{1}{n+1} (|\vec{a}_1|^2 + \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1) = \frac{1}{n+1} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2})$$

においては,  $\frac{1}{2}$  の項は  $n-1$  個あるので,

$$\vec{g} \cdot \vec{a}_1 = \frac{1}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot (n-1) \right) = \frac{1}{2}$$

$|\vec{g}|^2$  においては,  $|\vec{a}_i|^2 = 1$  の項は  $n$  個,  $i \neq j$  のとき,  $2\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$  の項は  ${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$  個あるから,

$$|\vec{g}|^2 = \frac{1}{(n+1)^2} \left( n + \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{n}{2(n+1)}$$

ゆえに分子は,

$$\vec{GO} \cdot \vec{GA}_1 = -\vec{g} \cdot \vec{a}_1 + |\vec{g}|^2 = -\frac{1}{2} + \frac{n}{2(n+1)} = \frac{-1}{2(n+1)}$$

つづいて分母だが, 図の対称性より重心から見た頂点  $A_1$ ,  $O$  は可換であるから,  $|\vec{GA}_1| = |\vec{GO}|$  より,

$$|\vec{GO}| |\vec{GA}_1| = |\vec{GO}|^2 = |\vec{g}|^2 = \frac{n}{2(n+1)}$$

したがって,

$$\cos \theta = \frac{\vec{GO} \cdot \vec{GA}_1}{|\vec{GO}| |\vec{GA}_1|} = \frac{-1}{2(n+1)} \div \frac{n}{2(n+1)} = -\frac{1}{n}$$

が得られ, 予想通りであった。

このことから, 正  $n$  次元単体の中心角の  $n \rightarrow \infty$  の極限は直角といえる。

