包除原理と ${}_n\mathrm{C}_r$ と Σ の相性について

柏陵高等学校　西川　誠

1　サイコロの目の和について

「2 つのサイコロを投げて，目の和が 10 になるのは，何通りあるか？」という問題は，普通は表を作ったりして $4+6$，$5+5$，$6+4$ の 3 通りと求めますが，この問題と，和集合の要素の個数を求める公式

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)^{*1}$$

とが関係あることは，あまり知られていないようです。

サイコロが 2 個で目の和が n になる場合で説明してみます。

まず $x+y=n$ のサイコロの目としての解の個数を $N_2(n)$ と表示することにします。x, y に 1 ずつ分配してしまい，残り $n-2$ を x, y に分配すると考えます。それは，重複組合せの数となるので，${}_2\mathrm{H}_{n-2}$ で求まります*2。これだと x, y が 7 以上になる場合も数えてしまっているので，それを引くことになります。

まず x が 7 以上になる場合は，x に 7，y に 1 だけ分配してしまい，残り $n-8$ を x, y に分配すると考えて ${}_2\mathrm{H}_{n-8}$ で求まります。y の方が 7 以上になる場合も同様なので，やはり ${}_2\mathrm{H}_{n-8}$ となります。2 つをあわせて考えると $2 \times {}_2\mathrm{H}_{n-8}$ となります。先頭の 2 は，${}_2\mathrm{C}_1$ の 2 です。

2 つの操作を続けてやると $N_2(n) = {}_2\mathrm{H}_{n-2} - {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{H}_{n-8}$ から，これだと x も y も 7 以上になる場合が引きすぎになって $\cdots$ とやっていくのですが，サイコロ 2 個の場合，和の値 n が 13 以上は意味がないので，x も y も 7 以上になる場合はありません。だから，ここで終了となります。

これで $x+y=n$ のサイコロの目としての解の個数 $N_2(n)$ を表す公式 ① が得られます。(ただし $2 \leqq n \leqq 7$ の場合は，1 番目の項だけで求まります。)

$$N_2(n) = {}_2\mathrm{H}_{n-2} - {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{H}_{n-8} \cdots \text{公式①}$$

この公式①で $n=10$ を代入すると，$N_2(10) = {}_2\mathrm{H}_8 - {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{H}_2 = 9 - 2 \times 3 = 3$ と計算できます。この問題の場合に，計算で求めるメリットはほとんどありませんが，サイコロが 3 個，4 個と増えても同様の公式ができるところが面白い所です。

実際の計算には，対称性も利用して $2 \leqq n \leqq 7$ の場合 $N_2(n) = {}_{n-1}\mathrm{C}_1$ となり，$8 \leqq n \leqq 12$ の場合 $N_2(n) = N_2(7 \times 2 - n - 1)$ で求めるともっと楽にできます。

次に $x+y+z=n$ のサイコロの目としての解の個数を $N_3(n)$ と表示することにして，やってみます。同様に考えれば，次の式がすぐ出てくると思います。

---

*1 この公式は，包除原理と呼ばれています。

*2 重複組合せ ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$

$$N_3(n) = {}_3\mathrm{H}_{n-3} - {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{H}_{n-9} + {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{H}_{n-15}$$

${}_3\mathrm{H}_{n-9}$ は 1 つが 7 以上の場合，残りの 2 つは条件なし。
${}_3\mathrm{H}_{n-15}$ は 2 つが 7 以上の場合，残りの 1 つは条件なし。

サイコロが 3 個の場合も，高校の教科書でも出てくる

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

という公式と同じですから，包除原理って馬鹿にできない強力な原理なのです。
サイコロが 3 つの場合で和が 14 になる場合の解の個数 $N_3(14)$ を求めてみましょう。この場合 ${}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{H}_{n-15}$ の部分は不用です。

$$N_3(14) = {}_3\mathrm{H}_{11} - {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{H}_5 = {}_{13}\mathrm{C}_{11} - {}_3\mathrm{C}_1 \times {}_7\mathrm{C}_5 = 78 - 63 = 15$$

となります。実際に確認してみると，和が 14 になるものは，$6+6+2$，$6+5+3$，$6+4+4$，$5+5+4$ のようなものがあり，並べ方まで考えてやると 15 通りになっています。この場合も実際の計算には，対称性も利用して次のようにまとめるのが一番楽です。

$3 \leqq n \leqq 8$ の場合 $N_3(n) = {}_{n-1}\mathrm{C}_2$
$9 \leqq n \leqq 10$ の場合 $N_3(n) = {}_{n-1}\mathrm{C}_2 - 3 \times {}_{n-7}\mathrm{C}_2$
$11 \leqq n \leqq 18$ の場合 $N_3(n) = N_3(7 \times 3 - n)$ です。
真ん中から後の残り半分は，同じ値が出てくるだけだということです。

上と同様な $N_3(14)$ をこちらの公式で求めてみると，随分楽です。

$$N_3(14) = N_3(7 \times 3 - 14) = N_3(7) = {}_{7-1}\mathrm{C}_2 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$$

と，一致します。
私が 35 年ほど前の高校時代に科学新興社から出版されていた，モノグラフ「18. 順列と組合せ（藤崎真佐五著）」に，5 個のサイコロを投げて和が 10 になる場合の数を求めよという問題が出ていたのですが，そのときは，解答が母関数を利用して解いてあったもので，高校時代の私には，難しく感じたものです。今回のこのレポートのようにやるなら，サイコロ 5 つで和が 10 の場合は，
$N_5(10) = {}_5\mathrm{H}_{10-5}$ つまり ${}_9\mathrm{C}_5$ を計算するだけで，求まってしまいます。こんな簡単に出ることを 35 年目にしてやっとわかりました。母関数を利用する方法は，意味がないわけではないので，次節で母関数について少し説明しておきます。

2　母関数との関係について

3 つのサイコロの目の和が 14 になる問題を母関数を利用して求めるなら，$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$ を展開した場合の x^{14} の係数を求めることに対応します。これを $\dfrac{x^3(1-x^6)}{(1-x)^3}$ のように変形して処理すると，前節で求めたような公式を導くことができます。
一般的に簡単な例で母関数をまとめておくと，

① A，B，C，D，E の中から 3 個取ってくる組合せ数は，$(1+x)^5$ を展開したときの x^3 の係数に対応しています。 つまり ${}_5\mathrm{C}_3$ です。

② E，E，F，F，G，G，H，H の中から同じ文字の重複はを 2 種類まで許して 6 個取ってくる組合せ数は，$(1+x+x^2)^4$ を展開したときの x^6 の係数に対応しています。

　これを計算で求めるなら，

${}_4\mathrm{H}_6 - {}_4\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{H}_3 + {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{H}_0 = 10$
ただし，${}_4\mathrm{H}_3$ は 1 つが 3 以上の場合，残りの 3 つは条件なし。
${}_4\mathrm{H}_0$ は 2 つが 3 以上の場合，残りの 4 つは，条件なし。

となります。

　また $(1+x+x^2)^4$ を展開したときの係数を一度に求める方法を，北海道岩見沢農業高等学校の加藤秀隆先生に教えていただきましたので紹介しておきます。パスカルの三角形をまねして 3 つずつの和を考えようということです。最初と 2 番目の項のように，前の 3 つの項の和でないものもありますが，それは，適当に解釈してください。

1 乗の場合の係数→ 1，1，1
2 乗の場合の係数→ 1，2，3，2，1　（$2=1+1$，$3=1+1+1$ です。）
3 乗の場合の係数→ 1，3，6，7，6，4，1
（$3=1+2$，$6=1+2+3$，$7=2+3+2$ です。）
4 乗の場合の係数→ 1，4，10，16，19，16，10，4，1
（$4=1+3$，$10=1+3+6$，$16=3+6+7$，$19=6+7+6$ です。）

こういった計算は，コンピュータでエクセルにやらせると簡単に求まります。

③ A，B，C，E，E，F，F，G，G，H，H の中から 6 個（E~H の文字の重複は 2 種類まで許して）取ってくる組合せ数は，$(1+x)^3(1+x+x^2)^4$ を展開したときの x^6 の係数に対応しています。

　私には，この 2 つの積になっている形のものは，あまり楽には求められないのですが，簡単に求める方法をご存じの方がいらっしゃいましたら教えてください。

3　サイコロの目の積について

　ここまでにやったことを利用すると，サイコロの目の積の問題が同様な方法で解けることを発見しましたので，この節ではそれを説明します。

　具体的な問題でやってみましょう。

問題　サイコロ 10 個を投げて目の積が，129600 になるのは，何通りあるか？

　（解答）$129600 = 5^2 \cdot 3^4 \cdot 2^6$ と分解して，まず 5 の目が出るサイコロを 10 個の中から，2 つ選ぶ必要があります。それが，${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通り。

　その次に，3 の目が関係するものを残り 8 個の中から 4 つ選びます。それが，${}_8\mathrm{C}_4$ 通り。

　最後に 2 を 6 個分配するのですが，それは，A，B，C，D，E，E，F，F，G，G，H，H の中から 6 個（E~H の文字の重複は 2 種類まで許して）取ってくる組合せ数に対応していますから，$(1+x)^4(1+x+x^2)^4$ を展開したときの x^6 の係数に対応しています。

$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$$

は，普通のパスカルの三角形で求まり，

$$(1+x+x^2)^4 = 1+4x+10x^2+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8$$

は，前節でやった加藤秀隆先生に教えていただいた方法で求まります。

この 2 つの積を考えると

$$\begin{aligned}&(1+x)^4(1+x+x^2)^4\\&=(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)(1+4x+10x^2+16x^3+19x^4+16x^5+10x^6+4x^7+x^8)\end{aligned}$$

より展開して x^6 が出てくる部分だけ計算すると，

$$1\times 10+4\times 16+6\times 19+4\times 16+1\times 10=262$$

となります。以上により

$${}_{10}\mathrm{C}_2 \times {}_{8}\mathrm{C}_4 \times 262 = 825300$$

通りと求まります。

数式処理のソフトがあれば，$(1+x+y+x^2+z+xy)^{10}$ の展開で，$z^2y^4x^6$ の係数はあっという間に求まると思いますが，手計算でやる場合はこの方法が一番楽だと思います。

積の場合も和と似たような計算でできる所が面白いと思いますが，いかがでしょうか？和の場合を扱った本はみかけますが，積の場合に母関数が $(1+x+y+x^2+z+xy)^{10}$ だと書いてある本を見かけたことがありません。自分では，少し新しい発見かなと思っているのですが，何かの本にこんなやり方が紹介されていたら教えて下さい。

4　$S_m(n)$ の式から $S_m(n-1)$ の式を簡単に求める方法

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

がわかっているときに，$k=1$ から $n-1$ までの和を知りたくなるときが，ときどきあります。普通は展開された形の公式を使用しないので，n の所に $(n-1)$ を代入するものですが，展開された形がわかっている場合はすごく簡単に求まることを発見しました。

アイデアは単純で $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2$ と $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2$ との違いですから，上の式の一番右端の式から n^2 を引けばよいのです。つまり，

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

となります。これを，もっと一般的にやってみます。

$S_m(n)=\sum\limits_{k=1}^{n} k^m$ とおくと，この式は $(m+1)$ 次式で，降べきの順で 2 番目の項の係数は $\dfrac{1}{2}$ となります。つまり，$S_m(n)=D\cdot n^{m+1}+\dfrac{1}{2}\cdot n^m+E\cdot n^{m-1}+\cdots$ の形となります[*3]。

[*3] Σk^m の第 2 番目の項の係数がいつでも $\dfrac{1}{2}$ ということは，帰納法で証明するか，$(k+1)^{m+1}-k^{m+1}=(m+1)k^m+\cdots$ の辺々を $k=1$ から n まで加えることにより容易に導けます。

$S_m(n-1) = S_m - n^m$ に注意すれば，2 番目の項の符号を変えるだけで $S_m(n-1)$ が得られます。

例えば，$S_4(n) = \sum k^4$ の場合

$$\sum k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

なので，これから n^4 を引いたものが，$S_4(n-1)$ ですから，2 番目の項の符号を変えるだけで求まってしまう訳です。

5 $S_m(n)^2$ を簡単に求める方法

前節でやったことを利用すると，べき乗の和を 2 乗した式の面白い関係式が簡単に得られます。$S_m(n) = \sum_{k=1}^{n} k^m$ の 2 乗で説明します。

$$S_m(n) = D \cdot n^{m+1} + \frac{1}{2} \cdot n^m + E \cdot n^{m-1} + \cdots$$

とおくと $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ と $S_m(n) = S_m(n-1) + n^m$ に注意して，

$$\begin{aligned} \{S_m(n)\}^2 - \{S_m(n-1)\}^2 &= n^m \cdot \{2S_m(n) - n^m\} \\ &= 2D \cdot n^{2m+1} + 2E \cdot n^{2m-1} + \cdots \end{aligned}$$

となります。これに，n に 1 から n まで代入して，左辺の和と右辺の和をすべてとれば，

$$\{S_m(n)\}^2 = 2D \cdot S_{2m+1}(n) + 2E \cdot S_{2m-1}(n) + \cdots$$

が得られます。つまり n^m の係数だけがうまく消えて，他の係数は $S_m(n)$ の多項式の係数を 2 倍するだけで関係式が得られるという，面白い結果が得られました。いくつか例をあげておきます。

$S_m(n)$ の (n) は見にくくなるので省略して表示します。

$m = 1$ のとき $S_1 = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n$ より S_1^2 は，$S_{2m+1} = S_3$ となり，係数は n^1 の項 $\frac{1}{2} \cdot n$ を消して残りの係数を 2 倍した 1 になります。$S_1^2 = 1 \cdot S_3 = S_3$

あまりにも簡単なので，逆に何をやったかがわからなくなりませんか？これは，普通の表示だと $(\Sigma k)^2 = \Sigma k^3$ という有名な関係式ですが，これがすごく簡単に得られた訳です。

$m = 2$ のとき $S_2 = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$ より S_2^2 は，$S_{2m+1} = S_5$，$S_{2m-1} = S_3$ の式となり，係数は 2 番目の n^2 の項を消して残りの係数を 2 倍して，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$ となります。

$S_2^2 = \frac{2}{3} \cdot S_5 + \frac{1}{3} \cdot S_3$

あっと，いう間に求まります。

$m=3$ のとき（n^3 の項は消えます。）$S_3=\frac{1}{4}\cdot n^4+\frac{1}{2}\cdot n^3+\frac{1}{4}\cdot n^2$
$S_3^2=\frac{1}{2}\cdot S_7+\frac{1}{2}\cdot S_5$

となります。これも，普通の表示だと $2(\Sigma k^3)^2=\Sigma k^7+\Sigma k^5$ というわりと有名な関係式ですが，すごく簡単に得られました。

これを n で微分して $4(\Sigma k^3)(3\Sigma k^2)=7\Sigma k^6+5\Sigma k^4$ という変わった等式も証明できます。

6 Σk と ${}_n\mathrm{C}_r$ の相性

まず表示法を整理しておくと，

$$\sum_{k=1}^{n} k=\Sigma^1 k,\ \ \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} k=\Sigma^2 k,\ \ \sum_{q=1}^{n}\sum_{p=1}^{q}\sum_{k=1}^{p} k=\Sigma^3 k,$$

のように表示することにします。何回も Σ をとるような操作を考えている訳です。

まず，普通の和を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表示してみましょう。

$$\Sigma^1 k^1=\Sigma\frac{k(k+1)}{2}-\Sigma\frac{k(k-1)}{2}={}_{n+1}\mathrm{C}_2$$

のように差分の形に変形できることに注意すれば，以下同様な変形で，$\Sigma^2 k^1={}_{n+2}\mathrm{C}_3$ となることもすぐわかります（添え字が 1 増えるだけです）。一般的には，$\Sigma^r k^1={}_{n+r}\mathrm{C}_{r+1}$ となります。

このように，何回も Σ をとる操作と ${}_n\mathrm{C}_r$ は，すごく相性が良いわけです。こういったことは，Faulhaber が，1631 年ころに研究していたようです。「Σk^{2m+1} は，Σk の多項式の形で表され，Σk^{2m} は，$(2n+1)\times(\Sigma k$ の多項式$)$ の形で表される。」という「Faulhaber の定理」を発見した人です。400 年も前に，こういった多重べき和まで考えていたなんて結構驚異的です。一般的な Faulhaber の定理は，次のようになります。

$N_r=\frac{n^2+rn}{2}$ とおくと，
　m が奇数の場合 $\Sigma^r k^m$ は，$(N_r$の多項式$)\times\Sigma^r k^1$ となる。
　m が偶数の場合 $\Sigma^r k^m$ は，$(N_r$の多項式$)\times\Sigma^r k^2$ となる。

$m=1$ の場合は，終わっているので，$m=2$ と $m=3$ の場合を示してみます。

$$\Sigma^1 k^2=\Sigma(k-1)k+\Sigma k=2\cdot{}_{n+1}\mathrm{C}_3+{}_{n+1}\mathrm{C}_2$$

と表示できることに注意すれば，以下同様な変形で $\Sigma^r k^2=2\cdot{}_{n+r}\mathrm{C}_{r+2}+{}_{n+r}\mathrm{C}_{r+1}$ となり，これを，${}_{n+r}\mathrm{C}_{r+1}$ でくくると $\Sigma^r k^2=\frac{2n+r}{r+2}\Sigma^r k^1$ となります。

次に

$$\Sigma^1 k^3=\Sigma(k-1)k(k+1)+\Sigma k=3\cdot{}_{n+2}\mathrm{C}_4+{}_{n+1}\mathrm{C}_2$$

と表示できることに注意すれば，以下同様な変形で

$$\Sigma^r k^3=3\cdot{}_{n+r+1}\mathrm{C}_{r+3}+{}_{n+r}\mathrm{C}_{r+1}$$

となり，これを，${}_{n+r}\mathrm{C}_{r+1}$ でくくると

$$\Sigma^r k^3 = \frac{12N_r + r(r+1)}{(r+2)(r+3)}\Sigma^r k^1$$

となります[*4]。

次に

$$\begin{aligned} k^4 &= k(k-1)k(k+1) + k^2 \\ &= 6k \cdot {}_{k+1}\mathrm{C}_3 + k^2 \\ &= 6(k-2) \cdot {}_{k+1}\mathrm{C}_3 + 12 \cdot {}_{k+1}\mathrm{C}_3 + k^2 \\ &= 24 \cdot {}_{k+1}\mathrm{C}_4 + 12 \cdot {}_{k+1}\mathrm{C}_3 + k^2 \end{aligned}$$

より $\Sigma^1 k^4 = 24 \cdot {}_{n+2}\mathrm{C}_5 + 12 \cdot {}_{n+2}\mathrm{C}_4 + \Sigma^1 k^2$ と表示できることがわかり，以下同様な変形で

$$\Sigma^r k^4 = 24 \cdot {}_{n+r+1}\mathrm{C}_{r+4} + 12 \cdot {}_{n+r+1}\mathrm{C}_{r+3} + \Sigma^r k^2$$

となり[*5]，これを整理すると，

$$\Sigma^r k^4 = \frac{24N_r + r(r-5)}{(r+3)(r+4)}\Sigma^r k^2$$

となります。このような感じでどんどん作っていける訳です。

Faulhaber は，$\Sigma^{11} k^6$ を計算し，それを n の式でも表示しているようです。Knuth によると，Faulhaber 本人以外で，それが正しいことを確認した人なんていないようです。コンピュータで処理しないと，とてもやる気にならない計算ですからね。

私も UBASIC で $\Sigma^{11} k^6$ を計算し

$$\frac{6n^{17} + 561n^{16} + \cdots + 1021675563656n^5 + \cdots - 96598656000n}{2964061900800}$$

となることを，確認してみました。手での計算は，ちょっとやる気になりません。

参考文献

今回の内容は，北海道岩見沢農業高等学校加藤秀隆先生から教えていただいた内容を自分なりに再整理したものです。

また，京都府立鳥羽高等学校の稲葉芳成先生から Faulhaber については，Knuth の論文「Johann Faulhaber and Sums of Powers」に詳しいことを教えていただきました。今回のレポートの§6 は，この論文を読みながら自分で計算させてみた結果の報告です。

[*4] $N_r = \dfrac{n^2 + rn}{2}$ です。

[*5] 脚注 *4 と同様です。