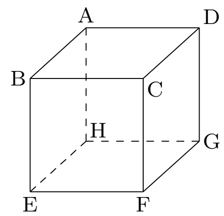
組合せに関する2題

県立柏高等学校　　金城 幸枝

1　58 = 56 ?

3年生の入試問題を解いているとき，次のような問題に出会った。

(問) 右の図の立方体の各頂点を結び四面体を作る。何個作れるか。



数学科では, おもしろそうな問題があるとよくみんなで議論する。

α：立方体は，頂点が8個あるから，そのうちの4個を選べば四面体ができる。だから ${}_8\mathrm{C}_4 = 70$ になるよ。でも，同一平面上にあるときは四面体にならないし，平面は6個あるから $70 - 6 = 64$ が答えだ。

β：ちょっと，待って!平面は他にもあるよ。ABFG，HECD，BCGH，ADFE，AHFC，BEGD の6個あるから，平面は合計12個あるよ。だから $70 - 12 = 58$ が答えだね。

γ：三角形を作ってから，四面体を作ってみたらどうなるかな？

β：まず，三角形は頂点8個の中から3個とれば1個の三角形ができるから ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$ になるよ。例えば，まず △ABC をとると，四面体は向かい合う平面上の4点 E， F， G， H のなかから1点とるとできるから，4種類の四面体ができる。

α：でも，四面体 ABCH についてみてみると，同じ四面体が △ABH でも，△BCH でも，△ACH でもできるね。だから，$(56 \times 4) \div 4 = 56$ が答えになるね。

α：あれ？前の答え58と違っているよ。どうしてだろう？

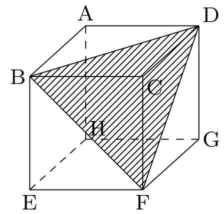
γ：順々に考えてみようよ。まず，立方体の頂点8個の中から3個とると1個の三角形ができるから，三角形は全部で ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$ 個できる。三角形を1個決めると，残りの頂点5個から1個選ぶと四面体ができるね。

α：でも，そうするとさっきと同様，残りの5点から1個とるとき，その取り方によって，平面になるときがあるね。それを除かないといけないよ。4点でできる平面は12個だったね。

β: もう1つ問題があるね。たとえば，△ABC を作って，残りの頂点を H とすると，四面体 ABCH ができる。四面体 ABCH は △ABH を作って，残りの頂点を C ととったときもできるし，△BCH でも，△ACH でもできる。

α: だから，四面体の数は $({}_8\mathrm{C}_3 \times 5) \div 4 - 12 = 58$ となって，前の答えと一致するね。

γ: 式だけみていると，前の式 ${}_8\mathrm{C}_4 - 12 = \dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} - 12$ と今回の式 ${}_8\mathrm{C}_3 \times 5 \div 4 - 12 = \dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\cdot\dfrac{5}{4} - 12$ は全く同じだね。



α: $({}_8\mathrm{C}_3 \times 4) \div 4 = 56$ の式がどうして間違いなのかピンとこないね。

β: じゃあ，こんな風に考えてみようよ。△ABC を作ってから，残りの点を選んで四面体を作る。平面にならないためには4点の中から選ぶことになる。でも，正三角形 BFD を作ってから四面体を作ると，どんな点を選んでも平面になることはないから，5通り選び方がある。

α: わかった！正三角形を作ってから，四面体を作るときは選べる頂点は4個でなく，5個なんだ。そこに鍵があったんだね。

γ: そうだね。このような正三角形は8個あるね。なぜなら，1つの頂点 C をえらぶと，正三角形 BFD ができる。頂点は8個あるから正三角形は8個できる。正三角形でない三角形は ${}_8\mathrm{C}_3 - 8 = 48$ 個ある。48個の三角形が作る四面体の個数は $48 \times 4 = 192$(個)，8個の三角形が作る四面体の個数は $8 \times 5 = 40$(個) となって，$192 + 40 = 232$ 個の四面体ができる。でも，1つの四面体について4つの面の各三角形はそれぞれ同じ三角形を作るから $234 \div 4 = 58$(個) となる。

α: なるほど！これで完全納得だ！

2 いとこ同士の結婚等を何回繰り返したとき「してはいけない結婚」となるか？

「してはいけない結婚」とは親と子，兄と妹，姉と弟，叔父と姪，叔母と甥の結婚のことである。このことを遺伝子で考えてみたい。両親の遺伝子をそれぞれ a と b とする。彼らの子どもは $a(=aa)$，$b(=bb)$ のそれぞれの半分 a と b の遺伝子を受け継ぎ，子どもの遺伝子は ab となる。同様に，両親の遺伝子 c と d を受け継いだ子の遺伝子は cd となる。

最初の結婚は赤の他人同士の結婚から始まるものとする。本稿では，生物学の優性遺伝や劣性遺伝等のことは触れず，a の遺伝子を持つ兄弟姉妹は同じ遺伝子 a をもつものとする。

「してはいけない結婚」である叔父と姪の結婚を考えてみる。叔父の遺伝子は $a(=aaaa)$，姪の遺伝子は $ab(=aabb)$ と考えられるから，叔父と姪の結婚のとき結婚によって受け継がれる子どもの遺伝子は $aaab$ となる。このように，同じ遺伝子 a が全体の $\frac{3}{4}$ を占めることとなる。

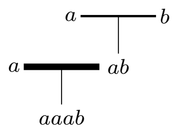


図 1: 叔父と姪の結婚 (1)

したがって,「してはいけない結婚」とは「同じ遺伝子が全体の $\frac{3}{4}$ 以上を占める」ときであると考えられる。

遺伝子 ab と遺伝子 cd をもつ者同士が結婚すると，彼らの子どもたちの遺伝子は $abcd$ をもつ。遺伝子 ab と遺伝子 $abcd$ をもつ者同士，すなわち叔父と姪が結婚すると，彼らの子どもの遺伝子はどうなるであろうか。遺伝子 $ab(=aaaabbbb)$ から半分，遺伝子 $abcd(=aabbccdd)$ から半分ずつ継承するわけであるから，子どもの遺伝子は $aaabbbcd$ つまり $(ab)(ab)(ab)cd$ となる。ゆえに，同じ遺伝子 ab が全体の $\frac{3}{4}$ となっているから,「してはいけない結婚」となる。

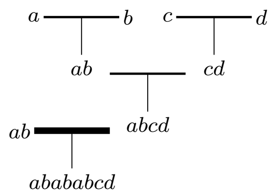


図 2: 叔父と姪の結婚 (2)

同じ遺伝子 a をもつ兄弟姉妹同士の結婚では，遺伝子 aa と aa の半分ずつを継承した子どもの遺伝子は aa すなわち a となる。同様に，同じ遺伝子 ab を持つ兄弟姉妹の結婚においてもその子どもの遺伝子は ab となる。このように，兄弟姉妹同士の結婚では，その子どもの遺伝子全体において，同じ遺伝子が占める割合は 1 であり，$\frac{3}{4}$ 以上であるから「してはいけない結婚」となる。

以後，叔父等の言葉は省略し，遺伝子だけで表すことにする。

遺伝子 ab と遺伝子 c の結婚においては，彼らの子どもは $aabb$ と $cccc$ の半分ずつを継承して $abcc$ となり,「してはいけない結婚」ではない。

しかし，兄弟姉妹が同じ遺伝子をもつことを考えると，何回か結婚を繰り返していくうちに「してはいけない結婚」が現れることがある。

図 3 以降をを参照すると，4 家族または 5 家族の中だけで結婚を繰り返すと，3 世代目で「してはいけない結婚」が現れる。また，6 家族または 10 家族の中だけで結婚を繰り返すと，4 世代目で「してはいけない結婚」が現れることがわかる。

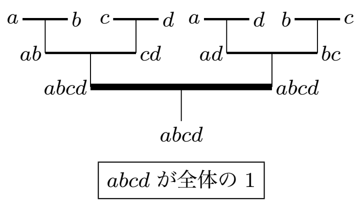


図 3: 4 家族の中での繰り返し結婚 (1)

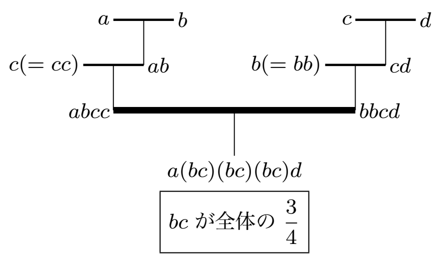
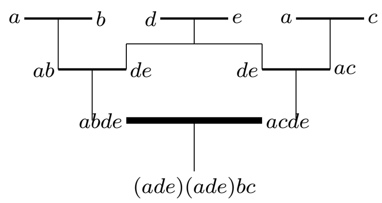
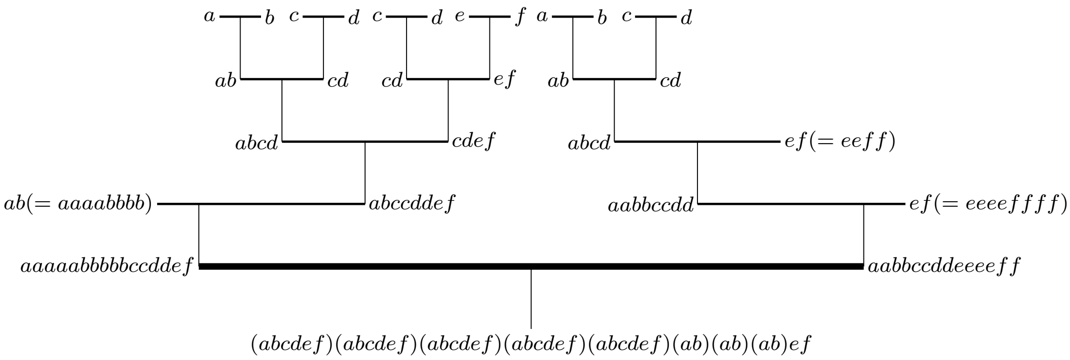


図 4: 4 家族の中での繰り返し結婚 (2)



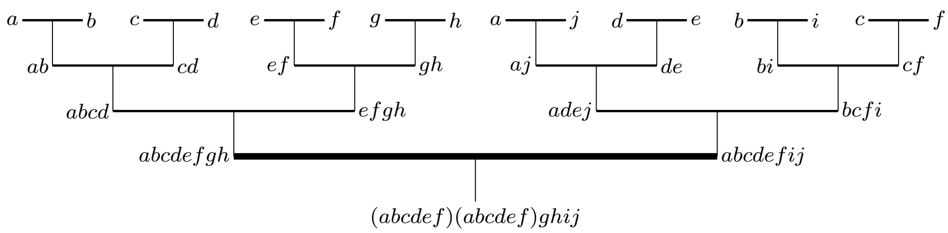
$\boxed{ade\ \text{が全体の}\ \frac{3}{4}}$

図 5: 5 家族の中での繰り返し結婚



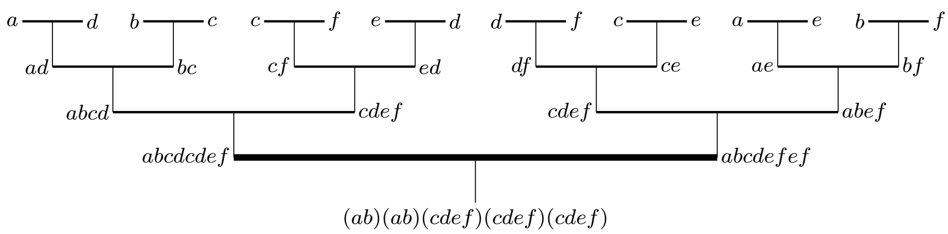
$\boxed{abcdef\ \text{が全体の}\ \frac{3}{4}}$

図 6: 6 家族の中での繰り返し結婚 (1)



$\boxed{abcdef\ \text{が全体の}\ \frac{3}{4}}$

図 7: 10 家族の中での繰り返し結婚



$\boxed{cdef\ \text{が全体の}\ \frac{3}{4}}$

図 8: 6 家族の中での繰り返し結婚 (2)