数列の指導法についての考察

茂原樟陽高等学校　木村　謙二

1　等比数列の和の公式

$3, 6, 12, \cdots, 3072, \cdots$

この数列について，3072 の次の項は?という問いについて，$3072 = 3 \times 2^{10}$，$3 \times 2^{11} = 6144$, と計算する方はあまりいないと思います。簡単に $3072 \times 2 = 6144$ と計算しているはずです。では，次の計算をしてください。

$3 + 6 + 12 + \cdots + 3072$

今度は $3072 = 3 \times 2^{10}$ から考えようとはしていないでしょうか。でも実際には 10 乗であることを計算する必要は全くありません。簡単に $3072 \times 2 - 3 = 6141$ で計算できます。この計算がみなさんにすんなりと受け入れられるとは思っていません。違和感があって当然だと思います。それは，我々が等比数列の和の公式について本質を教わってこなかったからだと思います。

等比数列の和の公式

$r \fallingdotseq 1$ のとき, $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

この形の公式が標準ですが，私はこの形にこそ問題点があると思います。この形だと n の値を知りたくなってしまうのです。また，仮に n の値が与えられているような場合でも，r^n を実際に計算していくためには，すべての項を計算するのと同等な計算が必要になり（累乗を暗記していれば別ですが），あまり便利な公式とはいえないのではないでしょうか。前述の和の計算のように末項の値がはっきりしていれば，n の値は不必要です。そこで，この公式から括弧をはずして，展開した式にしてみましょう。また，さらに変形すると

$r \fallingdotseq 1$ のとき, $S_n = \dfrac{ar^n - a}{r - 1} = \dfrac{a_{n+1} - a_1}{r - 1}$

実際生徒には，$\{$(次の項) $-$ (初項)$\} \div \{$(公比) $- 1\}$ の様に指導しています。この形で覚えていれば，末項 3072 から次の項 6144 を計算して和を容易に求めることができます。

何故このような違和感のある状態になっているかというと，等比数列の和の公式の導き方にあると思います。従来の方法としては $rS_n - S_n$ を計算する方法か，$a^n - b^n$ の因数分解を利用するといった，文字式の変形によって導く方法が一般的だと思います。このような中身の見えない機械的な変形が，本来興味深いはずの等比数列の和の性質から遠ざける要素となっていると思います。ではその興味深いはずの等比数列の和の性質とはどのようなものでしょうか。

2 等比数列の和の性質

メーターが 99999 から 100000 になる瞬間，わくわくした気持ちを抱くのは私だけではないでしょう。

$$\begin{aligned}1+9 &= 10\\ 10+90 &= 100\\ 100+900 &= 1000\\ 1000+9000 &= 10000\\ 10000+90000 &= 100000\end{aligned}$$

というドミノ効果が数学者の心をくすぐるのだと思います。等比数列の和はこの現象と同じ様なことが起きているのです。このわくわく感が授業で生徒と共有できれば最高です。

まずはシンプルに初項 1，公比 2 です。これは 2 進法と絡めて考えるとおもしろいです。

$1+2+4+\cdots+32768 = 111111111111111_{(2)} (= \mathrm{FFFF}_{(16)})$ これに 1 を加えると $\cdots$。

次は公比が 3 で考えてみましょう。このときドミノ効果が起こるように工夫すればいいわけです。3 進法で考えれば考えやすいですね。

$$\begin{aligned}1+3+\ 9+\cdots+2187 &= 11111111_{(3)}\\ \times 2 \Rightarrow \underline{2}+\underline{6}+\underline{18}+\cdots+\underline{4374} &= 22222222_{(3)} \quad \text{これに } \mathit{1} \text{ を加えると}\cdots\text{。}\end{aligned}$$

10 進数の方はわかりにくいので書くと，

$$\begin{aligned}\mathit{1}+\underline{2} &= \boxed{3}\\ \boxed{3}+\underline{6} &= \boxed{9}\\ \boxed{9}+\underline{18} &= \boxed{27}\\ \cdots &\\ \boxed{2187}+\underline{4374} &= 6561 \qquad S=(6561-1)\div 2=3280\end{aligned}$$

次は初項を 1 以外にしてやってみます。

$\underline{3}+\underline{6}+\underline{12}+\underline{24}+\cdots+\underline{768}$

これに $\mathit{3}$ を加えると

$$\begin{aligned}\mathit{3}+\underline{3} &= \boxed{6}\\ \boxed{6}+\underline{6} &= \boxed{12}\\ \boxed{12}+\underline{12} &= \boxed{24}\\ \cdots &\\ \boxed{768}+\underline{768} &= 1536\end{aligned}$$

よって 768 の次の 1536 がでてきます。

そして，考えにくいものですが，公比を -2 でやってみます。

$$\begin{array}{rccccccccccccc} & 1 & + & (-2) & + & 4 & + & (-8) & + & \cdots & + & 1024\\ \times(-3)\Rightarrow & (\underline{-3}) & + & \underline{6} & + & (\underline{-12}) & + & \underline{24} & + & \cdots & + & (\underline{-3072})\end{array}$$

これに $\mathit{1}$ を加えると

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathit{1} & + & (\underline{-3}) & = & \boxed{-2} \\
\boxed{-2} & + & \underline{6} & = & \boxed{4} \\
\boxed{4} & + & (\underline{-12}) & = & \boxed{-8} \\
 & & & \cdots & \\
\boxed{1024} & + & \underline{3072} & = & \boxed{-2048}
\end{array}
$$

ドミノ効果という印象はないものの，元の数列が見えてくるでしょう。

以上をまとめてみると次のような結果が得られます。

(1) 全体を（公比 -1）倍して飽和状態を作る。
(2) 初項を加えてドミノ効果を起こす。
(3) 末項の次の項が得られる。

式で書けば $(r-1)S_n + a_1 = a_{n+1}$ となる。これを $S_n =$ に変形してやると，和の公式

$\{$(次の項) $-$ (初項)$\} \div \{$(公比) $- 1\}$

が得られる。

この指導において大事なポイントは，等比数列は自分自身に和もしくは和の元になる値があるということです。即ち，数列から離れた全く別個な計算をすることなしに，自分自身の数列の値から計算をすべきだ，ということなのです。

3 階差数列での指導

階差数列が等差数列になれば Σ を使えば解くことができますが，いつも Σ を使っていると，階差数列が等比数列になったとき，パニックになってしまう生徒はいないでしょうか。このとき，みなさんはどのような解法の仕方を示していますか。Σ で書かないというのは勿論ですが，第 $(n-1)$ 項がでてきたりして，等比数列の和の公式の n 乗の部分がすっきりした形で使えるだろうか，という問題があります。自分自身が学生だったときも，この部分に関しては，どうも満足できる認識が得られなかった記憶があります。仮に先生に質問しても，どうも言葉で誤魔化されてしまうのではないか，という気がしていました。そこで第何項かをすっきりとさせるため次のように指導しています。

$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1}$,　　b_n は等比数列

（等比数列の時は Σ を使わずに末項が第何項であるかを明記する）

第 $(n-1)$ 項の次の項は第 n 項なので，和の（次の項）は一般項の式をそのまま使えばよい（ラッキー）。結局元に戻るわけで，ここでこのラッキーを強調しておくと効果があります。

例 3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, $\cdots$ の一般項を求める

階差数列をとると，1, 2, 4, 8, 16, 32, $\cdots$ よって $b_n = 2^{n-1}$

（ここでこの $b_n = 2^{n-1}$ を和の次の項の部分にそのまま使って）

$$a_n = 3 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = 3 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} + 2$$

これは $n = 1$ の時にも成り立つ

4　二項間漸化式での指導

二項間漸化式の代表的な形，$a_{n+1} = pa_n + q$ の解法といえば，

(1) 階差数列をつくる方法
(2) 特性方程式による方法

の 2 つがありますが，なかなか理解しにくい部分の問題でしょう。特に (2) の方法は使いこなせれば便利なのですが，そこに至るまでが厳しいものがあります。また特性方程式の解 α とはいかなる値なのか，というのもここではよくある質問です。みなさんはどのように生徒に返答していますか。まあ，この数列が収束するとして，その極限値を α とすることにより特性方程式ができる，位の話はできるとしても，私自身すっきりとした説明はできていません。しかし，次のように具体的な数値を補うことで少し理解に近づけることができた気がしました。

例 $a_1 = 8,\ a_{n+1} = 2a_n - 3$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）
具体的にかくと，8, 13, 23, 43, 83, 163,

(1) 階差数列をとると，5, 10, 20, 40, 80, $\cdots$
これはこれで非常に意味を持つ。即ち，この漸化式で与えられる数列は前述の階差が等比になるパターンと一緒であるということ。ですから，前の授業で得意になっていれば喰い付きはよい。

(2) マジックナンバー α を探させる
「この数列のすべての数からからある特別な数を引くと，なんときれいな数列になるという。では，そのある数とはいったいいくつだろうか?」
全体から 3 を引くと，5, 10, 20, 40, 80, $\cdots$
この関係を式で書けば，$a_n - 3 = 5 \times 2^{n-1}$ となる訳だが，この 3 はどのように見つけられるのだろうか。そして，この α を使うとどうして等比数列にできるのか，漸化式を変形することによって確認してみよう。といった具合に話を進める。

ここでは文字式の変形ばかりに終始してしまいがちな傾向になるため，生徒の難しいという印象に一層拍車をかけ，問題からの逃避を加速させてはいないでしょうか。もちろん，ある一定レベル以上の生徒に関しては，飛んでしまえば簡単なハードルで，より多彩なパターンへと進むことができるでしょうが，一般的な高校生にはそそり立つ壁の如くに見えると思います。そこで，指導者側としては，飛べそうだという気にさせる工夫として，具体的数値が大事になってくると思います。更には生徒による α の発見という高みにまで登れれば申し分のないものとなるでしょう。または，漸化式に入る前に，階差が等比数列になる問題ででで α の存在について学習しておくといった方法もあると思います。

5　Σ の公式

Σk の公式の説明として，２つの階段状のものを組み合わせて長方形を作るのが一般的ですが，それ以降の公式の説明が，急に文字式の変形となってしまうのに不満を覚えた方はいないでしょうか。私は大いに不満でした。そこで，自分で作ってしまおうと思い至ったのです。

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

この公式から考えられることは，6 個組み合わせれば n，$n+1$，$2n+1$ の辺を持つ直方体になる，ということです。実際に $1+4+9+16$ を細かい立方体を組み合わせた立体図形を制作しました。各 1，4，9，16 は底面が正方形なので，これを階段状に重ねます。丁度，ピラミッドを上から見て，4 つの三角形がそれぞれ半分になるように，真上から十字に 4 分割した時の 1 つの図形ができあがります（写真 1）。この階段状の部分がうまく組み合わされて，6 個でうまく直方体ができるはずです（写真 2）。実際にやってみると，すんなりとはいかないまでも，見事に直方体ができ感動できました。できれば何セットも作り，たくさんの生徒がチャレンジできるといいと思います。参考のため，展開図を載せておきます（写真 3）。

写真 1

写真 2

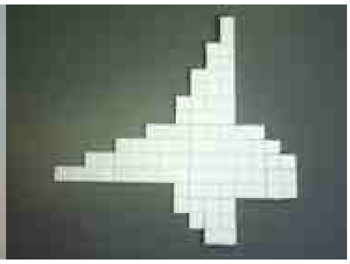

写真 3（のりしろを含んでいます）

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

これは 4 次元? 一瞬の躊躇がありますが，この公式でみなさんが一度は思っただろうこと，そうこの右辺は Σk を使っているのです。そして，最終形は二乗だ。二乗といえば正方形! つまり，これは一辺が Σk の正方形を目指せばよいことになります。そうすると各パーツは平面図形でいいはずです。そこで正方形にこだわってみたら次のようなパーツができました。

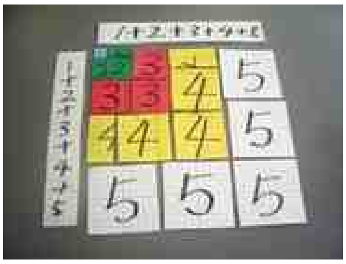

写真 4

$$(1\times1)\times1,\ (2\times2)\times2,\ (3\times3)\times3,\ (4\times4)\times4,\ (5\times5)\times5,\ \cdots$$

これらを組み合わせていくと，正方形が $\cdots$ できない。しかし，偶数番目を 1 つだけ半分に割れるようにしたらうまくいきました

後日気がついたことですが，このパズルの元は既に小学校の学習内容にあったのです。それも小学校二年生，実は九九の表でした。えっ，と思った人は，九九の表を睨み続けてください。単純に「九九の表をすべて足すといくつになる」から入るという方法もありますね。