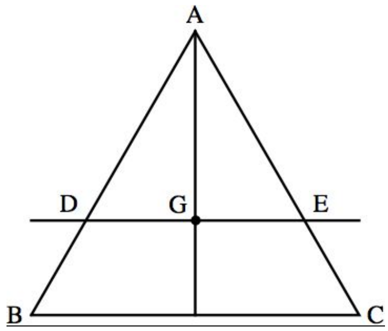
平均値と中央値について

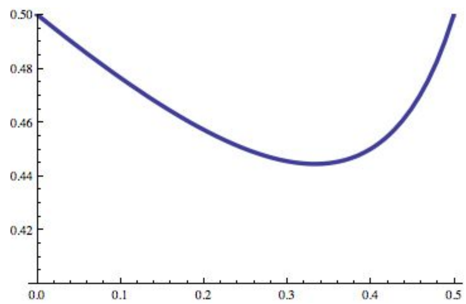
東葛飾高等学校　大橋 真也

あらすじ

以前にどこかの学校の公開授業で積分の実習として，工作用紙などを使って放物線などをはじめとするさまざまな関数で囲まれた領域の不思議議な形をした独楽 (コマ) を作る実習を見た経験がある。これは定積分で面積を求めて，その面積の中心から独楽の中心を見つけるという内容のものであったと記憶しているが，久しぶりにその実習の様子を思い出したときにその方法に疑問を感じた。ここに書いたことは当然のことであり，すでにみなさんが知っていることをわたしだけが単に勘違いしていただけのものであるかもしれない。

1　重心とは





重心とは重さの中心である。三角形の場合には，3 中線の交点であり，それぞれの中線を 2:1 の比に内分する点でもある。

確かに中線はその三角形の面積を 2 等分する。しかし容易にわかるように「重心を通る直線が常にその三角形の面積を二等分するとは限らない」ことはその対偶を考えればわかるように「三角形の面積を二等分するような直線は必ずしもその重心を通らない」ことを意味している。つまり三角形の面積の二等分の問題と重心の問題は別の問題なのである。

試しに正三角形 ABC について，底辺 BC に平行で重心 G を通る直線を考えると，これは正三角形の面積を 4:5 の比に分割している。

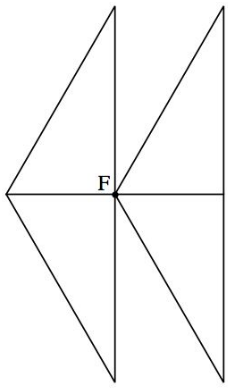
ここで図の点 D を点 B から出発し，辺 AB の中点まで移動し，そのときの BD の長さを t そのときの点 A を含む方の形の面積の全体の面積に対する比を考えると，以下のようなグラフになる。

ちなみにここでの極小値 (最小値) は，先ほどの辺 BC に平行になったときの $\dfrac{4}{9}$ である。

2　面積と重心

ここである疑問が浮かんでくる。三角形の重心は確かに3中線の交点であるが，それは面積を2等分しているからではない。このことは中線によって2分された三角形の面積が等しく，かつその2つの三角形の重心がもとの三角形の重心からの距離が等しいから起こることなのである。みなさんは重心の説明をするときに「それぞれの中線が，三角形の面積を2等分しているから$\cdots$」なんて説明していないだろうか。

このことは，以下のような図形からも容易に想像できる。以下の図形で重心は点Fではない。それは中心線(図の水平線)がシーソーで，そこに体重の同じ子供が違う場所に座った場合を考えるのと同じことである。

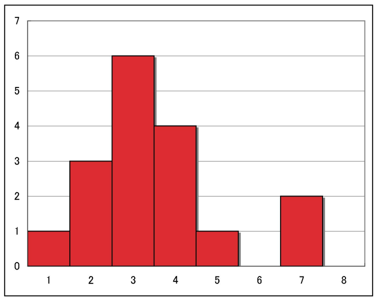


よく定積分の実習の例として，2次や3次の関数の領域を用いた奇妙な形の重心を面積を2等分する線で求めているが，その重心に軸をさして独楽を作ることがある。ここまでのことから，この実習の方法には疑問が生じる。実際にそれらの実習は上手く行っているのだろうか。「面積が2等分されているので，この線上に重心がある。」という一見まことしやかに述べられていることに意外な嘘が隠れているのである。

3　平均値と中央値

もともとこのようなことに疑問を感じたのは，統計で学ぶ平均値と中央値の考え方の違いについて考えていたことによる。平均値と中央値の違いは，平均年収などを例に挙げるとよくわかるが，平均年収は必ずしも一般の庶民年収の平均を反映しているとはいえない。これはかなりの高額所得者などがいるためでもある。庶民の年収を反映するためには，中央値がある程度適しているといわれている。

この平均値と中央値をヒストグラムで考えると，平均値はx軸(または横軸)の重さのバランスがとれる位置なのである。つまりシーソーの支点を意味している。他方の中央値はヒストグラムの面積を等分する位置なのである。



離散数学と連続数学の違いはあるが，どちらも面積である。ここから重さのバランスを表す平均値はそのままでは求めることができないのである。蛇足であるが，平均値とは確率分布や度数分布から考えれば，1次のモーメントである。「モーメント」という言葉から，平均値はまさに物理学の位置ベクトルと物理量のベクトル積を表す言葉なのである。