

Big Bang 直後の宇宙を次元解析で

市川南高等学校 金澤 志行

1 はじめに

高等学校で数学、物理学を学習した人なら次元解析という言葉を目にしたことが必ずあるであろう。

平易な例を挙げれば、天井からつるした振り子の周期を求めるのにその周期は重りの質量にはよらず、振り子の長さ、重力のみにより決定されることから次のような関係が生じる。

M (質量), L (長さ), T (時間)

$$[l]^x [g]^y = [t]$$

すなわち、

$$[L]^x [LT^{-2}]^y = [T]$$

$$[L]^{x+y} [T]^{-2y} = [T]$$

左右の次元を比較して、次の連立方程式が生まれる。

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -2y = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$$

$T \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$ 従って $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ となることが容易に導かれる。この次元解析を用いると Big Bang 直後の宇宙の大きさ、密度などが導ける。

物理の専門書には、これに触れているものもあると思うが、平易な方法で Big Bang 直後の宇宙について高校生でも理解できる内容を紹介してみたい。

2 Big Bang 直後の宇宙について

(1) 現在は宇宙誕生から 137 億年後^[1]。知られている最古の天体はすばる望遠鏡が発見した Big Bang 8 億年後の銀河といわれている。ここで、二間瀬敏史「はじまりのはじまり」^[2]を引用する。

超ひも理論 (1980年代から唱えられている量子論の1つ) は重力の量子論の有効な候補の1つですが、まだそれが正しいかどうかは明らかではない。正しい重力の量子論が分かっていないので宇宙のはじまりについて確定的なことはいえないが、量子論の一般的な性質を考慮して、宇宙の生成および消滅を考えることができる。そのような試みが「量子宇宙論」である。宇宙全体を1つの対象としたとき、量子効果が重要になるのは、宇宙の大きさが素粒子レベルになるころ、すなわち宇宙のはじまりである。

具体的には密度が1立方センチあたり 10^{93}g というとんでもない状態にまで、宇宙が縮まると、重力の効果と量子効果が同じ位になることがわかっている。これは、一般相対性理論の予言する Big Bang の瞬間から 10^{-43} 秒という非常に短い時間の密度に対応する。この短い時間を「プランク時間」といい、万有引力の重力法則に現れるニュートンの重力定数 G と量子論に現れるプランク定数 h 、そして自然界の普遍的速さである光速 c の3つの自然定数から決まる時間である。この時間の中に宇宙のはじまりがあるのである。

ここで、3つの自然定数とは、

- ア ニュートンの重力定数 G

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad G = 6.7 \times 10^{-8} \text{dyn} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^2$$

$$[G] = [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

- イ プランク定数

$$E = h\nu \quad h = 6.63 \times 10^{-27} \text{erg} \cdot \text{sec}$$

$$[h] = [ML^2T^{-1}]$$

- ウ 光速

$$c = 3.0 \times 10^{10} \text{cm/sec}$$

$$[c] = [LT^{-1}]$$

である。

(2) 次元解析を用いて密度が1立方センチ当たり 10^{93}g はどうやって求められるか。

$$\begin{aligned} [ML^{-3}] &= [c]^x [G]^y [h]^z \\ &= [LT^{-1}]^x [M^{-1}L^3T^{-2}]^y [ML^2T^{-1}]^z \\ &= [M]^{-y+z} [L]^{x+3y+2z} [T]^{-x-2y-z} \end{aligned}$$

両辺を比較して、連立方程式を解いて、

$$\begin{cases} -y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = -3 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$x = 5, \quad y = -2, \quad z = -1$$

よって、密度は、

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{c^5}{G^2 h} \\ &= \frac{(3 \times 10^{10})^5}{(6.7 \times 10^{-8})^2 \times 1.055 \times 10^{-27}} \\ &= 7.74 \times 10^{92} \text{g/cm}^3\end{aligned}$$

という具合に算出される。

(3) 『Big Bang の瞬間から 10^{-43} 秒という非常に短い時間の後の密度に対応する』という。
 10^{-43} 秒後とはどうやって求められるか。

次元解析を用いて、

$$\begin{aligned}[T] &= [c]^x [G]^y [h]^z \\ &= [LT^{-1}]^x [M^{-1}L^3T^{-2}]^y [ML^2T^{-1}]^z \\ &= [M]^{-y+z} [L]^{x+3y+2z} [T]^{-x-2y-z}\end{aligned}$$

両辺を比較して、連立方程式を解いて、

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ -x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$x = -\frac{5}{2}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{1}{2}$$

従って、

$$\begin{aligned}T &= [c]^{-\frac{5}{2}} [G]^{\frac{1}{2}} [h]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{Gh}}{c^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{6.7 \times 10^{-8} \times 6.63 \times 10^{-27}}{(3 \times 10^{10})^{\frac{5}{2}}} \\ &= 1.352 \times 10^{-43} \text{秒}\end{aligned}$$

という具合に求まる。

(4) プランクスケールについて。

宇宙のはじまりについて、いくつかの説を紹介する。

1つの考えは、いわば母宇宙という、はじめも終わりもない定常的な宇宙があって、そこから真空のゆらぎによって無数の子供宇宙ができては消え、できては消えているというものである。

子供宇宙の大きさはプランクスケールと呼ばれる 10^{-33} cm、寿命はプランク時間程度であるが、その中でたまたまインフレーションと呼ばれる急激な膨張をするものがある。インフレーションが終わってマイクロな宇宙からマクロな宇宙に成長すると、後は比較的ゆっくりとした膨張が長く続いて寿命が長くなる。そのような子供宇宙の1つが私達の宇宙というわけである「プランクスケール」と呼ばれる 10^{-33} cm をどのように求めるか説明すると、

次元解析を用いて、

$$\begin{aligned}[L] &= [c]^x [G]^y [h]^z \\ &= [LT^{-1}]^x [M^{-1}L^3T^{-2}]^y [ML^2T^{-1}]^z \\ &= [M]^{-y+z} [L]^{x+3y+2z} [T]^{-x-2y-z}\end{aligned}$$

両辺を比較して，連立方程式を解いて

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ x + 3y + 3z = 1 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad y = z = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} l &= \frac{\sqrt{Gh}}{c\sqrt{c}} \\ &= \frac{(6.7 \times 10^{-8} \times 6.63 \times 10^{-27})^{\frac{1}{2}}}{(3 \times 10)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 4.0 \times 10^{-33} \text{cm} \end{aligned}$$

こうして，プランクスケールが求められる。
(プランクスケールを 2π で割って使うこともある)

3 まとめ

以上まとめると，

「Big Bang の瞬間から 10^{-43} 秒 (プランクタイム) という非常に短い時間の後の 10^{93}g/cm^3 という超高密度の宇宙ができてくる」

「子供宇宙の大きさはプランクスケールと呼ばれる 10^{-33}cm 程度である」

上記の 3 つの数字はすべて c (光速), G (重力定数), h (プランク定数) を基本とした次元解析を用いて求めることができる。ですから，次元解析を使えるようになれば先のような易しい計算を用いて自然界の秘密を解き明かせるようになるのである。この題材は授業でも使えるのではないだろうか。生徒も目を輝かせるのではないかと，想像する。

但し，今まで書いてきた超ひも理論 (super strings theory) は宇宙論の 1 つであることを書き加えたい。

参考文献

- [1] 「宇宙論」, Newton 2008 年 7 月号, pp.54-55.
- [2] 東北大学教授 二間瀬敏史, 「時間を旅する はじまりのはじまり」, 科学朝日, 1995 年 9 月号, pp.17-18. .