三角形におけるある不等式

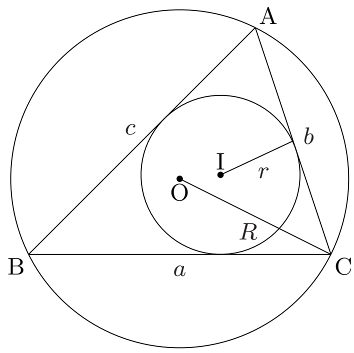
船橋東高等学校　山城 隆

不等式の証明は，絶対不等式 $X^2 \geqq 0$ が基本だと思っていたので，三角形の成立条件との絶妙な組み合わせで成り立つ不等式にある種の感激を覚えた。

(1) 三角形の外接円の半径を R，内接円の半径を r とおくと

$$R \geqq 2r$$

が成り立ち，等号成立は正三角形のときのみ。



[証明]

三角形の面積

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4R} = rs$$

$$\left(\text{ただし}\quad s = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
R - 2r &= \frac{abc}{4S} - \frac{4S}{a+b+c} \\
&= \frac{abc(a+b+c) - 16S^2}{4S(a+b+c)} \\
&= \frac{abc(a+b+c) - (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4S(a+b+c)} \\
&= \frac{a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 + 3abc - ac^2 + b^3 - b^2c - bc^2 + c^3}{4S}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8S(R-2r) &= (a^3+b^3) - (a^2b+ab^2) - (a^2c - 2abc + b^2c) \\
&\quad + (b^3+c^3) - (b^2c+bc^2) - (b^2a - 2abc + c^2a) \\
&\quad\quad + (c^3+a^3) - (c^2a+ca^2) - (c^2b - 2abc + a^2b) \\
&= (a-b)^2(a+b-c) + (b-c)^2(b+c-a) + (c-a)^2(c+a-b) \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

等号成立は $a = b = c$

(2)

$$\frac{3}{2} \geqq \cos A + \cos B + \cos C \geqq 2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A)$$

が成立。

[証明]

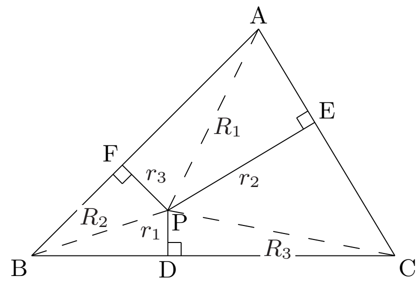
$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2} - (\cos A + \cos B + \cos C) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} - \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\
&= \frac{a^3 - a^2b - a^2c - ab^2 + 3abc - ac^2 + b^3 - b^2c - bc^2 + c^3}{2abc} \\
&= \frac{(a-b)^2(a+b-c) + (b-c)^2(b+c-a) + (c-a)^2(c+a-b)}{4abc} \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

等号成立は $a = b = c$

$$\begin{aligned}
&\cos A + \cos B + \cos C - 2(\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A) \\
&= \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \right) \\
&\quad -2 \left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \times \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \right) \\
&= \frac{1}{2a^2b^2c^2}(a^5b + a^5c - 2a^4bc - 2a^3b^3 + a^3b^2c + a^3bc^2 - 2a^3c^3 + a^2b^3c + a^2bc^3 \\
&\qquad + ab^5 - 2ab^4c + ab^3c^2 + ab^2c^3 - 2abc^4 + ac^5 + b^5c - 2b^3c^3 + bc^5) \\
&= \frac{1}{2a^2b^2c^2}\{(a^5b - 2a^3b^3 + ab^5 + a^3b^2c + a^2b^3c - a^4bc - ab^4c) \\
&\qquad + (b^5c - 2b^3c^3 + bc^5 + b^3c^2a + b^2c^3a - b^4ca - bc^4a) \\
&\qquad\quad + (c^5a - 2c^3a^3 + ca^5 + c^3a^2b + c^2a^3b - c^4ab - ca^4b)\} \\
&= \frac{1}{2a^2b^2c^2}\{ab(a-b)^2(a+b)(a+b-c) + bc(b-c)^2(b+c)(b+c-a) + ca(c-a)^2(c+a)(c+a-b)\} \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

等号成立は $a = b = c$

(3) (1) は右図のように，△ABC 内にとった点 P から各頂点と各辺への距離に対して拡張できて，



$\angle\mathrm{BPC} = 2\alpha$，$\angle\mathrm{CPA} = 2\beta$
$\angle\mathrm{APB} = 2\gamma$，$\alpha+\beta+\gamma = \pi$
(α,β,γ は鋭角になる)

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2(r_1 + r_2 + r_3) \quad \cdots ①$$

という，エルデシュの不等式が成立し，さらに

$$R_1R_2R_3 \geqq 8r_1r_2r_3 \quad \cdots ②$$

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 \geqq 4(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) \quad \cdots ③$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \geqq 2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \quad \cdots ④$$

$$\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_3r_1} \geqq 4\left(\frac{1}{R_1R_2} + \frac{1}{R_2R_3} + \frac{1}{R_3R_1}\right) \quad \cdots ⑤$$

も成り立つ。

[証明]

①について，

∠BPC，∠CPA，∠APB の 2 等分線と辺 BC，CA，AB の交点をそれぞれ X，Y，Z，PX=x，PY=y，PZ=z とする。このとき，

$$x \geqq r_1,\ y \geqq r_2,\ z \geqq r_3 \ (\text{等号成立は } R_1 = R_2 = R_3 = R)$$

により，

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2\,(x + y + z)$$

が証明できればよい。

$\triangle\mathrm{PBC} = \triangle\mathrm{PBX} + \triangle\mathrm{PCX}$ により，$\dfrac{1}{2}R_2R_3\sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}R_2x\sin\alpha + \dfrac{1}{2}R_3x\sin\alpha$

$$\therefore x = \frac{2R_2R_3\sin\alpha\cos\alpha}{(R_2 + R_3)\sin\alpha} \leqq \sqrt{R_2R_3}\cos\alpha \ \ (\text{等号成立は } R_1 = R_2 = R_3 = R)$$

同様に，

$$y \leqq \sqrt{R_3R_1}\cos\beta,\ \ z \leqq \sqrt{R_1R_2}\cos\gamma$$

よって，

$$R_1{+}R_2{+}R_3{-}2(x{+}y{+}z) \geqq R_1{+}R_2{+}R_3{-}2\left(\sqrt{R_2R_3}\cos\alpha + \sqrt{R_3R_1}\cos\beta + \sqrt{R_1R_2}\cos\gamma\right)$$

等号成立のとき

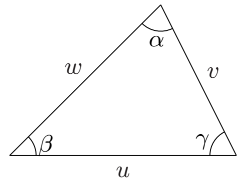
$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 3R - 2R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \\ &= 2R\left\{\frac{3}{2} - (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\right\} \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

等号成立は $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{3}$

したがって，①は，P が外心で，△ABC が正三角形のとき，等号成立

②について,

α, β, γ は鋭角なので，右図のような三角形を考える



$$u^2+v^2>w^2$$
$$v^2+w^2>u^2$$
$$w^2+u^2>v^2$$

$$\begin{aligned}
&R_1R_2R_3-8r_1r_2r_3\\
&\geqq R_1R_2R_3-8xyz\\
&\geqq R_1R_2R_3-8R_1R_2R_3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\
&=R_1R_2R_3\left(1-\frac{v^2+w^2-u^2}{vw}\times\frac{w^2+u^2-v^2}{wu}\times\frac{u^2+v^2-w^2}{uv}\right)\\
&=R_1R_2R_3\times\frac{u^6-u^4v^2-u^4w^2-u^2v^4+3u^2v^2w^2-u^2w^4+v^6-v^4w^2-v^2w^4+w^6}{u^2v^2w^2}\\
&=\frac{R_1R_2R_3}{2u^2v^2w^2}\{(u^2+v^2-w^2)(u^2-v^2)^2+(v^2+w^2-u^2)(v^2-w^2)^2+(w^2+u^2-v^2)(w^2-u^2)^2\}\\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

等号成立は Pが外心で,$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$

したがって，②は，P が外心で，△ABC が正三角形のとき，等号成立

③について

$$\begin{aligned}
&R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1-4(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)\\
&\geqq R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1-4(xy+yz+zx)\\
&\geqq R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1-4\sqrt{R_1R_2R_3}\left(\sqrt{R_3}\cos\alpha\cos\beta+\sqrt{R_1}\cos\beta\cos\gamma+\sqrt{R_2}\cos\gamma\cos\alpha\right)
\end{aligned}$$

等号成立のとき

$$\begin{aligned}
\text{右辺}&=3R^2-4R^2(\cos\alpha\cos\beta+\cos\beta\cos\gamma+\cos\gamma\cos\alpha)\\
&\geqq 2R^2\left\{\frac{3}{2}-2\times\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\right\}\\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

等号成立は $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$

したがって，③は，P が外心で，△ABC が正三角形のとき，等号成立

④について

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$
$$\geqq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$
$$\geqq \frac{1}{\sqrt{R_2R_3}\cos\alpha}+\frac{1}{\sqrt{R_3R_1}\cos\beta}+\frac{1}{\sqrt{R_1R_2}\cos\gamma}-2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)$$

等号成立のとき

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}-6\right)\\&=\frac{2}{R}\left(\frac{uv}{u^2+v^2-w^2}+\frac{vw}{v^2+w^2-u^2}+\frac{wu}{w^2+u^2-v^2}-3\right)\\&=\frac{2f(u,v,w)}{R(u^2+v^2-w^2)(v^2+w^2-u^2)(w^2+u^2-v^2)}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}&f(u,v,w)\\&=3u^6-u^5v-u^5w-3u^4v^2+u^4vw-3u^4w^2+2u^3v^3+2u^3w^3-3u^2v^4+6u^2v^2w^2-3u^2w^4\\&\qquad -uv^5+uv^4w+uvw^4-uw^5+3v^6-v^5w-3v^4w^2+2v^3w^3-3v^2w^4-vw^5+3w^6\\&=\frac{1}{2}(u-v)^2(u^2+v^2-w^2)\{u^2+v^2-w^2+2(u+v)(u+v-w)+2uv\}\\&\qquad +\frac{1}{2}(v-w)^2(v^2+w^2-u^2)\{v^2+w^2-u^2+2(v+w)(v+w-u)+2vw\}\\&\qquad\qquad +\frac{1}{2}(w-u)^2(w^2+u^2-v^2)\{w^2+u^2-v^2+2(w+u)(w+u-v)+2wu\}\\&\geqq 0\end{aligned}$$

ゆえに，右辺 $\geqq 0$

したがって，④は成立し，P が外心で，△ABC が正三角形のとき，等号成立

(別証)

$g(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ とおくと，$\dfrac{d^2}{dx^2}g(x)=\dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$ であり

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ では $\dfrac{d^2}{dx^2}g(x)>0$ となって，グラフは下に凸になる。

$$\therefore \frac{1}{3}\{g(\alpha)+g(\beta)+g(\gamma)\}\geqq g\left(\frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\right)=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=2$$

等号成立は $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ (イェンセンの不等式)

⑤について

$$\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_3r_1}-4\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_3R_1}\right)$$
$$\geqq \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}-4\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_3R_1}\right)$$
$$\geqq \frac{1}{R_3\sqrt{R_1R_2}\cos\alpha\cos\beta}+\frac{1}{R_1\sqrt{R_2R_3}\cos\beta\cos\gamma}+\frac{1}{R_2\sqrt{R_3R_1}\cos\gamma\cos\alpha}$$
$$-4\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2R_3}+\frac{1}{R_3R_1}\right)$$

等号成立のとき

$$\text{右辺}=\frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{1}{\cos\beta\cos\gamma}+\frac{1}{\cos\gamma\cos\alpha}-12\right)$$
$$=\frac{4}{R^2}\left(\frac{uv}{u^2+v^2-w^2}\times\frac{vw}{v^2+w^2-u^2}\right.$$
$$\left.+\frac{vw}{v^2+w^2-u^2}\times\frac{wu}{w^2+u^2-v^2}+\frac{wu}{w^2+u^2-v^2}\times\frac{uv}{u^2+v^2-w^2}-3\right)$$
$$=\frac{4h(u,v,w)}{R^2(u^2+v^2-w^2)(v^2+w^2-u^2)(w^2+u^2-v^2)}$$

ここで

$$h(u,v,w)$$
$$=3u^6-3u^4v^2-u^4vw-3u^4w^2+u^3v^2w+u^3vw^2-3u^2v^4+u^2v^3w+6u^2v^2w^2$$
$$+u^2vw^3-3u^2w^4-uv^4w+uv^3w^2+uv^2w^3-uvw^4+3v^6-3v^4w^2-3v^2w^4+3w^6$$
$$=\frac{1}{2}(u-v)^2(u^2+v^2-w^2)(3u^3+3v^3-w^2+6uv)$$
$$+\frac{1}{2}(v-w)^2(v^2+w^2-u^2)(3v^3+3w^3-u^2+6vw)$$
$$+\frac{1}{2}(w-u)^2(w^2+u^2-v^2)(3w^3+3u^3-v^2+6wu)$$
$$\geqq 0$$

ゆえに，右辺 $\geqq 0$

したがって，⑤は成立し，P が外心で，△ABC が正三角形のとき，等号成立